

N° d'ordre : 2203

THESE

présentée pour obtenir les titres de

DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE
spécialité : DYNAMIQUE DES FLUIDES

et de

DOCTEUR DE L'ECOLE NATIONALE D'INGENIEURS DE TUNIS EN GENIE
HYDRAULIQUE

MODELISATION DES ECOULEMENTS TURBULENTS A **BULLES**

par

Bellakhal Ghazi

Thèse soutenue le 07 Mars 2005, devant le jury composé de :

M.	Olivier SIMONIN	Président de jury
MM.	Taieb LILI	Rapporteur
	Alain LINÉ	Rapporteur
	Lucien MASBERNAT	Directeur de thèse
	Jamel CHAHED	Directeur de thèse
	Mahmoud MOUSSA	Membre

Résumé

Les milieux diphasiques mettent en jeu des interactions aux interfaces qui modifient d'une manière significative la structure des champs moyens et fluctuants des écoulements. La conception de modèles à deux fluides adaptés aux écoulements industriels nécessite la prise en compte de l'effet de ces interactions au niveau des relations de fermeture adoptées.

Le travail développé dans cette thèse porte sur le développement de modèles à deux fluides au premier ordre déduits par réduction des fermetures au second ordre. La démarche adoptée, basée sur le principe de décomposition du tenseur des contraintes de Reynolds en contributions turbulente et pseudo-turbulente statistiquement indépendantes, permet de préserver le contenu physique des fermetures au second ordre. L'analyse de la structure de la turbulence dans deux configurations d'écoulements de référence : écoulements homogènes à bulles uniforme derrière une grille et à cisaillement constant permet de déduire une formulation de la viscosité turbulente en milieux diphasiques faisant intervenir les échelles caractéristiques de la turbulence à bulles, ainsi qu'une description analytique de la modification induite par la présence des bulles de la structure de la turbulence homogène. Le modèle eulérien à deux fluides a été généralisé ensuite au cas des écoulements inhomogènes à faibles taux de vide. Les résultats numériques obtenus par l'application de ce modèle intégré dans le code de calcul MELODIF dans le cas de l'écoulement turbulent à bulles cisailé libre de sillage ont montré une concordance satisfaisante avec les données expérimentales et ont permis d'analyser la modification des échelles caractéristiques de cet écoulement par les interactions interfaciales. Le modèle à deux fluides au premier ordre est généralisé enfin au cas des écoulements à forts taux de vide où les interactions hydrodynamiques entre les bulles ne sont plus négligeables.

Mots clés :

Écoulement à bulles ; turbulence ; pseudo-turbulence ; fermeture au second ordre ; échelles caractéristiques ; modèle eulérien à deux fluides ; fermeture au premier ordre

Abstract

The two-phase flows involve interfacial interactions which modify significantly the structure of the mean and fluctuant flow fields. The design of the two-fluid models adapted to industrial flows requires the taking into account of the effect of these interactions in the closure relations adopted.

The work developed in this thesis concerns the development of first order two-fluid models deduced by reduction of second order closures. The adopted reasoning, based on the principle of decomposition of the Reynolds stress tensor into two statistically independent contributions turbulent and pseudo-turbulent parts, allows to preserve the physical contents of the second order relations closure. Analysis of the turbulence structure in two basic flows : homogeneous bubbly flows uniform and with a constant shear allows to deduce a formulation of the two-phase turbulent viscosity involving the characteristic scales of bubbly turbulence, as well as an analytical description of modification of the homogeneous turbulence structure induced by the bubbles presence. The eulerian two-fluid model was then generalized with the case of the inhomogeneous flows with low void fractions. The numerical results obtained by the application of this model integrated in the computer code MELODIF in the case of free sheared turbulent bubbly flow of wake showed a satisfactory agreement with the experimental data and made it possible to analyze the modification of the characteristic scales of such flow by the interfacial interactions. The two-fluid first order model is generalized finally with the case of high void fractions bubbly flows where the hydrodynamic interactions between the bubbles are not negligible any more.

Key words :

Bubbly flow ; turbulence ; pseudo-turbulence ; second order closure ; characteristic scales ; two-fluid eulerian model ; first order closure.

*À la mémoire de mon cher père qui m'a
dévouement soutenu au début de cette thèse et
que le destin n'a pas voulu qu'il assiste à son
accomplissement*

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été mené dans le cadre d'une thèse en cotutelle au Laboratoire d'Hydraulique de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis et à l'Institut National de Mécanique des Fluides de Toulouse de l'Institut National Polytechnique de Toulouse.

Il m'est agréable au terme de ce travail d'exprimer ma gratitude et mes vifs remerciements envers tous mes collègues et amis à l'ENIT et l'IMFT qui, par leur aide, leur soutien et leurs conseils, ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur Olivier Simonin, Directeur de l'IMFT, pour le grand intérêt qu'il a toujours manifesté envers ce travail, pour son aide précieuse et les conseils qu'il m'a prodigués. Je le remercie également pour l'honneur qu'il m'a accordé en acceptant de présider le jury.

Je remercie vivement Monsieur Alain Liné, Professeur à l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, d'avoir accepté juger ce document en tant que rapporteur et je lui suis très reconnaissant pour le grand intérêt qu'il porte à ce travail.

Je tiens à adresser mes sincères remerciements à Monsieur Taieb Lili, Professeur à la Faculté des sciences de Tunis, d'avoir bien voulu porter un jugement pour cette thèse en tant que rapporteur. Je me rappelle maintenant en rédigeant ces lignes, et après plusieurs années, que c'est avec le cours de la mécanique des milieux continus du Professeur Taieb Lili, que j'ai commencé à découvrir l'aspect passionnant et fascinant de la mécanique des fluides. Qu'il trouve dans ces quelques lignes la reconnaissance de l'un de ces anciens étudiants.

Ma gratitude s'adresse également à Monsieur Mahmoud Moussa, Professeur à l'ENIT, pour le soutien scientifique et moral qu'il m'a manifesté durant cette thèse. J'admire en lui sa bonne humeur et la convivialité qu'il inspire. Qu'il trouve dans ces mots ma sincère gratitude.

Que pourrais je dire pour remercier mes deux directeurs de recherche Monsieur Lucien Masbernat, Professeur à l'IMFT, et Monsieur Jamel Chahed, Maître de conférences à l'ENIT. Le travail que j'ai accompli sous leur direction durant toutes ces années a été pour moi un véritable épanouissement

aussi bien sur le plan scientifique qu'humain. L'accueil chaleureux que me réserve à chaque fois Monsieur Lucien Masbernati m'a permis de me sentir, au cours de mes séjours à Toulouse, un peu comme chez moi. Son regard critique, son appui scientifique et moral ont été pour moi d'une aide précieuse. Je n'oublierai jamais les prodigieux débats que nous avons menés. Qu'il trouve ici l'expression de toute ma reconnaissance. Les longues heures de discussion passées avec Monsieur Jamel Chahed ont été un véritable apprentissage du métier de chercheur. Sa façon d'aborder et de simplifier les difficultés que nous rencontrons, son dévouement pour la recherche ajoutés à ses qualités humaines n'ont pu que m'apporter le courage et la sollicitude dont j'avais besoin. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude.

Je me dois de remercier vivement Mademoiselle Véronique Roig, Maître de conférences à l'IMFT, pour son aimable accueil ; ce fût un bonheur de discuter avec elle.

Je tiens aussi à adresser mes chaleureux remerciements à mes amis : Monaem, Béchir, Foued, Nizar, Moez, Sadok et Daouser pour leur précieux soutien. Je suis persuadé que nos longs débats scientifiques et divers ont été pour moi une vraie source de richesse d'esprit. Je ne me dois pas de manquer d'avoir une vive pensée à mes amis de Toulouse : Chouaeb Labiod et Abdel Majid Lemaissi avec lesquels j'ai partagé de chaleureux moments.

Enfin je tiens à remercier profondément ma famille pour l'énorme amour qu'elle m'éprouve. Mon cher père, qui n'est plus des nôtres, était et le restera pour toujours mon honorable exemple dans la vie. Ma mère, qui ne cesse de m'offrir tant d'affection et de dévouement, a su m'apporter tout le courage dont j'avais besoin. J'espère que ce travail sera pour elle la preuve de mon amour. Une tendre pensée à ma sœur et mon frère pour leur soutien et leur affection, ils tiennent sans doute une énorme place dans mon cœur. Un très grand merci pour mon beau frère Mohsen qui n'a cessé de me soutenir et surtout je ne me dois pas d'oublier mes deux petits neveux Myriam et Aziz qui bien qu'ils soient nés au cours de ce travail, ont contribué à son aboutissement par leurs sourires et la joie de vie qu'ils répandent. J'adresse également ma sincère gratitude à ma belle-famille. Les cordiaux moments que nous partageons ensemble sont toujours un vrai réconfort pour moi. Et comme le veut bien la coutume, je finis par exprimer ma profonde reconnaissance à ma fiancée Rim. Je reconnais qu'elle a supporté, et qu'elle continue de le faire, ma consécration pour ce travail. J'espère que son aboutissement lui apporte une preuve d'amour.

Ghazi Bellakhal, Tunis, Mars 2005

Sommaire

Sommaire	1
Introduction	5
Chapitre 1 : Eléments de base de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles	9
1.1 Introduction.....	9
1.2 Concepts fondamentaux de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles	10
1.2.1 Description eulérienne des écoulements à bulles : équations instantanées	10
1.2.2 Equations eulériennes moyennées en milieu diphasique dispersé.....	13
1.3 Fermeture des équations eulériennes : modèle à deux fluides	16
1.3.1 Problème de fermeture	16
1.3.2 Principes méthodologiques de la fermeture du modèle à deux fluides.....	18
1.3.3 Modélisation des interactions interfaciales	19
1.3.4 Modélisation de la turbulence dans les écoulements à bulles.....	32
1.3.5 Pressions phasiques.....	36
1.4 Retour à l'expérience.....	37
1.4.1 Introduction.....	37
1.4.2 Ecoulements homogènes à bulles.....	40
1.4.3 Ecoulements inhomogènes à bulles.....	42
1.5 Apports de la simulation numérique	44
1.5.1 Approche par simulation numérique directe (DNS).....	45
1.5.2 Approche par simulation des grandes échelles.....	47
1.6 Conclusion.....	47

Chapitre 2 :	Modèles de turbulence en écoulement à bulles	49
2.1	Introduction.....	49
2.2	Expériences de turbulence homogène en écoulement à bulles	51
2.2.1	Turbulence homogène uniforme	52
2.2.2	Expérience de turbulence homogène avec cisaillement uniforme	57
2.3	Modèles de turbulence en écoulements à bulles : Analyse et essai de classification.....	65
2.3.1	Modèles de turbulence à une échelle de temps	65
2.3.2	Modèles de turbulence à deux échelles de temps.....	78
2.4	Conclusion.....	106
Chapitre 3 :	Modèles de turbulence à trois équations pour les écoulements à bulles	108
3.1	Introduction.....	108
3.2	Réduction des fermetures au second ordre de la turbulence en écoulement à bulles.....	109
3.2.1	Composantes du tenseur de Reynolds en turbulence homogène uniformément cisailée.....	109
3.2.2	Viscosité turbulente en écoulement à bulles	112
3.2.3	Structure de la turbulence à bulles en turbulence homogène uniformément cisailée.....	113
3.3	Modèles de turbulence au premier ordre pour les écoulements à bulles.....	122
3.3.1	Modèle k- ϵ à trois équations pour les écoulements à bulles.....	122
3.3.2	Modèle k- ω à trois équations pour les écoulements à bulles.....	125
3.4	Test des modèles de turbulence à trois équations en turbulence homogène à bulles.....	128
3.4.1	Equations de transport en turbulence homogène à bulles	128
3.4.2	Turbulence homogène de grille.....	130
3.4.3	Turbulence homogène avec cisaillement uniforme.....	132
3.5	Conclusions	139

Chapitre 4 :	Couches cisailées minces 2-D en écoulement à bulles	141
4.1	Introduction.....	141
4.2	Modèles eulériens à deux fluides	142
4.2.1	Equations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement	142
4.2.2	Fermetures du modèle à deux fluides : Modèle ENIT avec fermeture au premier ordre de la turbulence	143
4.2.3	Version initiale du code MELODIF.....	147
4.2.4	Version modifiée du code MELODIF.....	152
4.3	Résultats et interprétations.....	153
4.3.1	Remarques préliminaires.....	153
4.3.2	Expériences de l'écoulement de sillage à bulles	154
4.3.3	Simulation de l'écoulement monophasique	155
4.3.4	Simulation de l'écoulement diphasique.....	157
4.4	Solution affine du sillage à bulles.....	165
4.4.1	Considérations préliminaires.....	165
4.4.2	Sillage lointain monophasique	166
4.4.3	Sillage lointain diphasique	171
4.5	Conclusion.....	176
Chapitre 5 :	Ecoulement à bulles à fort taux de vide	178
5.1	Introduction.....	178
5.2	Etude du sillage d'une bulle en écoulement à bulles.....	180
5.2.1	Bilan de QDM dans le sillage lointain	180
5.2.2	Mouvement relatif des bulles en écoulement à bulles.....	183
5.3	Turbulence induites par les bulles en écoulement à fort taux de vide	187
5.3.1	Energie cinétique turbulente dans le sillage lointain.....	187

5.3.2	Résultats et discussions	190
5.4	Un nouveau modèle pour la turbulence induite par les bulles :	191
5.4.1	Equation de transport de la turbulence induite par les bulles :	191
5.4.2	Résultats et discussions	192
5.5	Conclusions	193
Conclusion		195
Références bibliographiques		198

Introduction

Les systèmes de fluides industriels et environnementaux mettent souvent en jeu des écoulements turbulents multiconstituants et/ou multiphasiques (génie pétrolier, génie chimique, génie énergétique, géo-fluides etc.). D'une manière générale la conception et le contrôle des systèmes de fluides multiphasiques se basent sur des méthodes globales de bilans matières dans les réacteurs dont les fermetures s'appuient sur des modélisations conceptuelles ajustées à partir d'expériences réalisées en laboratoires ou pratiquées sur des pilotes industriels ou semi-industriels. Cette approche est à l'origine des différents modèles industriels développés pour représenter de façon prédictive le fonctionnement global des réacteurs utilisés en génie des procédés.

Au plan scientifique, la modélisation des systèmes gaz-liquide pose des questions importantes sur lesquelles se penchent les communautés de chercheurs en mécanique des fluides appliquée et en génie des procédés. A la base de ces questions se trouve la complexité propre des systèmes mis en œuvre et qui sont souvent conçus pour mettre en contact différentes phases afin de favoriser des phénomènes de transfert ou de transformation. Ces milieux multiphasiques sont complexes et il est nécessaire d'améliorer la connaissance sur les interactions aux interfaces pour pouvoir représenter les phénomènes de transfert et les cinétiques de transformations dans ces milieux fluides multiphasiques.

Le progrès important réalisé au cours des dernières décennies dans le domaine de la Mécanique des Fluides Numérique permet aujourd'hui une approche plus phénoménologique des problèmes de transferts dans les systèmes de fluides mono et multiphasiques et le développement de modèles locaux recouvre aujourd'hui des enjeux majeurs au plan des applications. C'est particulièrement vrai pour ce qui concerne les contacteurs gaz-liquide où des travaux expérimentaux et de modélisation ont permis de progresser dans l'analyse à l'échelle locale des phénomènes physiques associés aux processus de transfert notamment en ce qui concerne le transfert de masse.

Cependant et en dépit du progrès important en mécanique des fluides numérique, d'importantes difficultés subsistent dans la modélisation et le calcul des systèmes multiphasiques turbulents. Ces difficultés qui résultent pour l'essentiel des interactions interfaciales appellent des modélisations plus

élaborées capables de représenter ces interactions et leurs effets sur les champs moyens, turbulents et de taux de présence des phases ; donc sur les mécanismes de transfert et de transformation. Elles renvoient également à la nécessité de développer des expériences pour analyser les phénomènes de transfert aux interfaces et pour développer et ajuster les modélisations.

Plusieurs expériences, réalisées au cours de la dernière décade, ont établi des descriptions locales d'écoulements gaz-liquide dispersés dans des configurations de base (écoulement homogènes, écoulements cisailés minces, écoulements en présence de paroi). Ces résultats expérimentaux mettent en évidence l'important effet de la présence des phases sur la structure des champs moyens et fluctuants. Ils montrent également que le champ moyen des forces interfaciales et la turbulence du liquide contrôlent la distribution spatiale des phases mettant en évidence les forts couplages entre champs moyens, champs fluctuant et champs de taux de présence des deux phases. Les expériences récentes en écoulements gaz-liquide à forts taux de vide montrent d'importantes modifications de la structure des écoulements diphasiques. Dans ces écoulements, l'agitation induite par les bulles devient prépondérante et la structure de l'écoulement diphasique est essentiellement gouvernée par le mouvement relatif des bulles. Il devient donc difficile de bien représenter l'écoulement diphasique et ses propriétés de transport turbulent sans une description précise des mécanismes qui contrôlent la turbulence "classique" du liquide, la "pseudo-turbulence" induite par les bulles et leurs éventuels couplages.

Turbulence et pseudo-turbulence sont deux phénomènes gouvernés par des mécanismes fondamentalement différents. En terme de description statistique, les deux champs fluctuants sont associés à des échelles différentes qui, pour les taux de vide modérés, ont pu être décrits en modélisant les équations de transport des tensions de Reynolds. Dans les écoulements à forts taux de présence du gaz (milieu dense), les interactions hydrodynamiques sont fortes et elles ont des effets importants sur la structure des champs moyens, fluctuant et de distribution des phases dans les écoulements diphasiques. Les expériences récentes en écoulement homogène à forts taux de vide fournissent des données remarquables pour tester ces idées de modélisations et pour développer des modèles plus généraux.

Parallèlement à ces travaux expérimentaux, des progrès importants dans la modélisation des écoulements à bulles, auxquels ont contribué les travaux conduits au Laboratoire de Modélisation en Hydrauliques et Environnement (LMHE) ont permis de développer des modèles eulériens à deux

fluides dans une approche statistique avec fermeture en un point au second ordre de la turbulence. Les travaux menés au Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement, dans le domaine de la modélisation des écoulements diphasiques gaz-liquide dispersés visent, précisément, l'amélioration des connaissances des interactions interfaciales. Les développements proposés précisent plus particulièrement deux aspects qui sont ou ignorés ou peu pris en considération dans les modèles actuels :

- en premier lieu, dans la formulation de la force moyenne interfaciale, on fait figurer, le tenseur de dispersion issu du terme de masse ajoutée. Le rôle des corrélations des fluctuations de vitesse du gaz, exprimées en fonction du tenseur de Reynolds du liquide, s'avère déterminant pour le calcul de la distribution de taux de vide dans les écoulements à bulles inhomogènes
- en second lieu, on affine la représentation des interactions interfaciales dans le modèle de turbulence. On décompose le tenseur de Reynolds de la phase continue en une partie turbulente produite par cisaillement et une partie, irrotationnelle, pseudo-turbulente , produite par le mouvement relatif des inclusions et on modélise une équation de transport pour chaque partie.

Les modélisations de la turbulence et des interactions interfaciales proposées ont été testées dans des configurations de base d'écoulements parallèles ou quasi-parallèles pour lesquelles on dispose de données expérimentales. Le modèle a ainsi été mis en œuvre pour simuler des écoulements turbulents homogènes à bulles et des écoulements de couches cisillées minces, en turbulence libre et en présence de parois, en gravité normale et en micro gravité. Ces applications se sont avérées très utiles pour préciser, analyser et comprendre les mécanismes physiques qui contrôlent les interactions interfaciales et leurs effets sur les champs cinématiques moyens et fluctuants des deux phases ainsi que sur leurs champs moyens de taux présence.

Cette présentation rapide des progrès récents dans la modélisation des écoulements diphasiques conduit à dégager un certain nombre d'orientations où on est en mesure d'attendre des avancées significatives dans le perfectionnement et la généralisation des modèles. C'est dans cette perspective que s'inscrivent les travaux présentés dans cette thèse. En s'appuyant sur une approche phénoménologique essentiellement fondée sur l'analyse d'expériences, sur l'analyse d'échelles et sur l'analyse dimensionnelle on propose de nouvelles idées de modélisation des interactions interfaciales. Il s'agit d'adapter d'orienter et d'anticiper les progrès scientifiques dans l'analyse physique et dans la modélisation des écoulements diphasique pour pousser les limites de validité des

modèles afin prendre en compte les complexités propres aux systèmes gaz-liquide. En particulier on propose un ensemble de fermetures qui visent deux objectifs essentiels : le premier concerne le développement, l'analyse et la validation de modèles de turbulence au premier ordre pour les écoulements à bulles. Ces modèles sont obtenus par analyse et réduction des fermetures au second ordre où on prend en compte les effets interfaciaux dans la modélisation des termes de redistribution et de diffusion avec des échelles caractéristiques de la turbulence et de la pseudo-turbulence. Le second objectif est relatif à l'amélioration de la modélisation de la pseudo-turbulence en écoulements à forts taux de vide pour élargir le domaine d'application des modèles aux systèmes industriels souvent conçus pour provoquer des transferts souvent en milieu dense.

Après avoir présenter dans le chapitre 1 la démarche de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles et préciser en particulier les difficultés caractéristiques de cette démarche, nous développons dans le chapitre 2 une sorte de classification des modèles de la turbulence à bulles disponibles dans la littérature dans une vision de dégager les traits caractéristiques de l'évolution de la modélisation de la turbulence à bulles. Dans le chapitre 3 nous analysons la structure de la turbulence à bulles homogène (uniforme et à cisaillement constant) afin de déduire des fermetures de la turbulence à bulles au premier ordre déduites par réductions des fermetures au second ordre. Dans le chapitre 4 nous généralisons le modèle au premier ordre $k_0 - k_s - \epsilon$ proposé dans le chapitre 3 au cas des écoulements inhomogènes. Ce modèle sera implanté dans le code industriel MELODIF et appliqué à l'écoulement à bulles cisailé mince de sillage. Nous généralisons en seconde étape le modèle au premier ordre développé au cas des écoulements à forts taux de vide où les interactions hydrodynamiques entre les bulles ne sont plus négligeables.

Chapitre 1 : Eléments de base de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles

1.1 Introduction

Le travail présenté dans cette thèse s'inscrit dans le cadre des recherches développées au Laboratoire de Modélisation en Hydraulique et Environnement à l'ENIT dans le domaine de la modélisation eulérienne des écoulements turbulents multiphasiques. Ces travaux conduits en étroite collaboration avec l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse visent l'amélioration des fermetures des modèles eulériens à deux fluides pour les écoulements gaz-liquide dispersés.

Dans les écoulements diphasiques, les grandeurs physiques subissent des sauts de discontinuité au passage des interfaces. La description eulérienne de l'écoulement n'est possible qu'à l'aide du formalisme des distributions qui permet ainsi d'étendre le domaine de définition des grandeurs physiques à tout le domaine de l'écoulement. Les équations instantanées de bilans de masse et de quantité de mouvement dans chaque phase sont ainsi pondérées par une fonction caractéristique de présence des phases. Le traitement statistique de ces équations instantanées permet de décrire le milieu diphasique, en termes de grandeurs moyennes phasiques définies et continues sur tout le domaine de l'écoulement.

Le premier chapitre de la thèse est consacré à la formulation eulérienne des équations de base du modèle à deux fluides et à leur modélisation. Les équations locales et instantanées sont présentées à l'aide du formalisme des distributions. Ces équations sont ensuite moyennées dans chaque phase et les bilans moyens qui en découlent sont commentés vis-à-vis du problème de fermeture. La fermeture des termes interfaciaux s'appuie sur la formulation lagrangienne de l'expression de la

force instantanée exercée par le fluide porteur sur les bulles. Plusieurs approches ont été proposées pour permettre le passage de la description lagrangienne de la force à la formulation eulérienne de l'échange interfacial.

Le développement de fermetures pour le modèle eulérien à deux fluides renvoie à la nécessité de les confronter aux données expérimentales. L'ensemble des résultats expérimentaux disponibles pour les écoulements à bulles est analysé dans la perspective de dégager une classification hiérarchique permettant de tester les modélisations. Nous évoquons également l'apport de la simulation numérique directe (DNS) et la simulation des grandes échelles (LES) dans la compréhension des phénomènes physiques qui contrôlent les écoulements à bulles.

1.2 Concepts fondamentaux de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles

1.2.1 Description eulérienne des écoulements à bulles : équations instantanées

1.2.1.1 Fonction caractéristique de présence de phase

Un écoulement à bulles peut être décrit à un instant donné par une répartition aléatoire des inclusions dans une phase continue. Cette répartition varie au cours du temps et on rencontre en chaque point du domaine de l'écoulement diphasique successivement, sur des intervalles de temps variables, la phase continue ou la phase dispersée. La description eulérienne instantanée d'un tel écoulement peut être réalisée en définissant une fonction $\chi_k(\mathbf{x}, t)$ qui indique la présence ou non de la phase k au point \mathbf{x} à l'instant t , (Ishii, 1975), (Drew, 1983) :

$$\chi_k(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} 1 & \text{si la phase } k \text{ est présente en } (\mathbf{x}, t) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1-1)$$

On supposera que l'interface séparant les deux phases est d'épaisseur nulle de sorte que l'on passe instantanément en la traversant d'une phase à l'autre. La fonction caractéristique de présence (1-1) vérifie les règles de dérivation suivantes (Ishii, 1975) :

$$\nabla \chi_k = -\mathbf{n}_{Ik} \delta_I \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial t} = -\mathbf{u}_I \nabla \chi_k \quad (1-3)$$

Avec :

\mathbf{u}_I : la vitesse de déplacement de l'interface

\mathbf{n}_{Ik} : un vecteur unitaire normal à la l'interface et orienté vers l'extérieur de la phase k

δ_I : une distribution de Dirac associée à l'interface

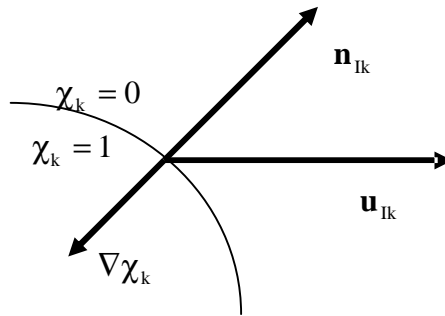


Figure (1-1) : Discontinuité à l'interface

Conséquence directe de l'hypothèse de l'épaisseur nulle des interfaces, la relation (1-2) indique que le gradient de la fonction caractéristique n'est différent de zéro qu'au passage des interfaces. La relation (1-3) signifie que lorsqu'on se déplace à la vitesse \mathbf{u}_I de l'interface on reste dans la même phase.

1.2.1.2 Equations locales instantanées

Les équations locales instantanées de conservation de masse et de quantité de mouvement dans chacune des phases s'écrivent:

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k) = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \mathbf{u}_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_k) + \rho_k \mathbf{g} \quad (1-5)$$

où $k = 1, 2$ pour distinguer la phase continue ($k=1$) et la phase dispersée ($k=2$), ρ_k est la masse volumique, \mathbf{u}_k est le vecteur vitesse, $\boldsymbol{\sigma}_k$ est le tenseur des contraintes et \mathbf{g} est l'accélération de pesanteur.

Les équations de conservation pour chaque phase définies, au sens des distributions, en tout point du domaine de l'écoulement s'obtiennent en multipliant les équations (1-4) et (1-5) par la fonction caractéristique de présence χ_k . En utilisant les propriétés (1-2) et (1-3) de la fonction caractéristique de présence des phases, les bilans instantanés s'écrivent :

Bilan de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \chi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \chi_k) = m_k \quad (1-6)$$

Bilan de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \mathbf{u}_k \chi_k) + \nabla \cdot (\rho_k \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k \chi_k) = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma}_k \chi_k) + \rho_k \chi_k \mathbf{g} + \mathbf{L}_k \quad (1-7)$$

où m_k et \mathbf{L}_k sont des termes interfaciaux donnés par les relations suivantes :

$$m_k = \rho_k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_{Ik} \delta_I \quad (1-8)$$

$$\mathbf{L}_k = [\boldsymbol{\sigma}_k + \rho_k \mathbf{u}_k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k)] \cdot \mathbf{n}_{Ik} \delta_I \quad (1-9)$$

Les termes interfaciaux font intervenir la distribution de Dirac définie sur les interfaces. Ils représentent les densités volumiques de transfert de masse et de quantité de mouvement à l'interface.

1.2.1.3 Relations de discontinuité aux interfaces

Les termes interfaciaux m_k et L_k assurent le couplage entre les équations de bilan des deux phases. En considérant qu'il n'y a pas accumulation de masse aux interfaces et que ces dernières sont soumises à des tensions superficielles, on établit alors les relations de saut suivantes :

$$m_1 + m_2 = 0 \quad (1-10)$$

$$L_1 + L_2 = f_{\sigma I} \delta_I \quad (1-11)$$

L'équation (1-10) traduit la conservation de la masse au niveau des interfaces, tandis que le terme $f_{\sigma I}$ représente l'action des tensions superficielles qui s'expriment par :

$$f_{\sigma I} = 2H\sigma_I \cdot n_{Ik} + \nabla_I \cdot \sigma_I \quad (1-12)$$

où H est la courbure algébrique de l'interface selon n_I , ∇_I est l'opérateur gradient pris par rapport aux coordonnées surfaciques et σ_I représente la tension superficielle.

1.2.2 Equations eulériennes moyennées en milieu diphasique dispersé

1.2.2.1 Opérateur de moyenne

La résolution directe des équations (1-6) et (1-7) suppose que l'on connaisse à chaque instant la position des interfaces et leurs vitesses de déplacement ce qui est quasi impossible. Le passage à une description moyennée de l'écoulement diphasique suppose que la prise de moyenne doit être effectuée dans chacune des phases. Ischii (1975) introduit à cet effet la notion de moyenne eulérienne phasique définie par :

$$\overline{\alpha_k \phi_k} = \langle \chi_k \phi_k \rangle \quad (1-13)$$

où ϕ_k est une grandeur quelconque associée à la phase k , α_k désigne le taux de présence de la phase k donné par la relation :

$$\alpha_k = \langle \chi_k \rangle \quad (1-14)$$

$\langle . \rangle$ désigne un opérateur de moyenne vérifiant les conditions de Reynolds :

- De linéarité : $\langle \lambda f + g \rangle = \lambda \langle f \rangle + \langle g \rangle$ (1-15)

- D'idempotence : $\langle \langle f \rangle \rangle = \langle f \rangle$ (1-16)

- De commutativité vis-à-vis des opérateurs de dérivation :

$$\langle \nabla f \rangle = \nabla \langle f \rangle \quad \text{et} \quad \left\langle \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle f \rangle \quad (1-17)$$

f et g sont deux variables quelconques et λ est une constante.

Notons que l'opérateur de moyenne phasique ne commute pas en général avec tout opérateur de dérivation D et on montre aisément que :

$$\overline{D\phi_k} = D\overline{\phi_k} - \frac{1}{\alpha_k} \langle (\phi_k - \overline{\phi_k}) D\chi_k \rangle \quad (1-18)$$

L'opérateur de moyenne statistique vérifie les conditions de Reynolds. Il est défini à partir de N réalisations ϕ_N dans des expériences répétitives d'une grandeur ϕ en un point (\mathbf{x}, t) selon :

$$\langle \phi \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi_i \right) \quad (1-19)$$

Cependant, l'opérateur de moyenne statistique n'est pas adapté pour l'analyse expérimentale et on a généralement recours aux opérateurs de moyenne temporelle ou spatiale définies respectivement par :

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{T} \int_T \phi \, dt \quad (1-20)$$

$$\langle \phi \rangle = \frac{1}{V} \int_V \phi \, dv \quad (1-21)$$

qui vérifient les conditions de Reynolds respectivement dans les écoulements stationnaires et ergotiques. Cependant lorsque ces trois opérateurs vérifient telles conditions, ils permettent d'aboutir à des équations formellement équivalentes et il est ainsi inutile de préciser la nature de l'opérateur choisi.

La composante fluctuante de la grandeur ϕ_k est définie par la relation :

$$\chi_k \phi'_k = \chi_k \left[\phi_k - \overline{\phi_k} \right] \quad (1-22)$$

avec :

$$\langle \chi_k \phi'_k \rangle = 0 \quad (1-23)$$

L'utilisation de l'opérateur de moyenne phasique permet ainsi d'obtenir des grandeurs moyennes phasiques définies et continues sur tout le domaine de l'écoulement. Elle décrit ainsi le milieu diphasique comme un mélange de deux fluides coexistants et en interaction. Cette formulation efface l'information sur la géométrie des interfaces et décrit les interactions interfaciales par des termes définis et continus sur tout le domaine de l'écoulement.

1.2.2.2 Equations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement

Les bilans moyens de masse et de quantité de mouvement sont obtenus en moyennant les équations de conservation locales et instantanées (1-6) et (1-7). Ils s'écrivent :

Bilan moyen de masse :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \alpha_k) + \nabla \cdot (\rho_k \alpha_k \overline{\mathbf{u}_k}) = \langle m_k \rangle \quad (1-24)$$

Bilan moyen de quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k \alpha_k \overline{\mathbf{u}_k}) + \nabla \cdot (\rho_k \alpha_k \overline{\mathbf{u}_k} \overline{\mathbf{u}_k}) = -\nabla (\alpha_k \overline{p_k}) + \nabla \cdot \left[\alpha_k (\overline{\boldsymbol{\tau}_k^l} + \overline{\boldsymbol{\tau}_k^t}) \right] + \alpha_k \rho_k \mathbf{g} + \langle \mathbf{L}_k \rangle \quad (1-25)$$

Dans l'équation (1-25) le tenseur moyen des contraintes est écrit comme la somme des contraintes de pression et des contraintes visqueuses $\overline{\boldsymbol{\tau}_k^l}$:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}_k^l} = -\overline{p_k} \mathbf{I} + \overline{\boldsymbol{\tau}_k^l} \quad (1-26)$$

$\overline{\boldsymbol{\tau}_k^t}$ représente le tenseur des contraintes turbulentes donné par :

$$\overline{\boldsymbol{\tau}_k^t} = -\rho_k \overline{\mathbf{u}_k' \mathbf{u}_k'} \quad (1-27)$$

Compte tenu de (1-8) et (1-9), les termes d'échange interfaciaux de masse et de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\langle m_k \rangle = \langle \rho_k (\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_k) \cdot \mathbf{n}_{Ik} \delta_I \rangle \quad (1-28)$$

$$\langle \mathbf{L}_k \rangle = \left\langle \left[\overline{m_k \mathbf{u}_k} + (-p_k \mathbf{n}_{Ik} + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_{Ik}) \right] \delta_I \right\rangle \quad (1-29)$$

Les interfaces sont supposées sans masse et d'épaisseur nulles dans lesquelles il n'y a pas accumulation de matière. La conservation de masse aux interfaces s'écrit alors :

$$\sum_{k=1}^2 \langle m_k \rangle = 0 \quad (1-30)$$

D'autre part, les interfaces sont soumises à des tensions superficielles. Le bilan de quantité de mouvement sur ces interfaces s'écrit :

$$\sum_{k=1}^2 \langle \mathbf{L}_k \rangle = \langle (2H\boldsymbol{\sigma}_I \cdot \mathbf{n}_{Ik} + \nabla_I \cdot \boldsymbol{\sigma}_I) \delta_I \rangle \quad (1-31)$$

Le second membre de l'équation (1-31) représente la moyenne de la contribution des interfaces à la force totale qui s'exerce sur le mélange diphasique : le premier terme représente le bilan normal de quantité de mouvement, il est relié à la courbure et à la tension superficielle, le second correspond au saut de la contrainte tangentielle à l'interface, il est nul en l'absence des effets de gradient des tensions superficielles sur l'interface tel que l'effet Marangoni lié au gradient de température.

1.3 Fermeture des équations eulériennes : modèle à deux fluides

1.3.1 Problème de fermeture

En l'absence de transfert de masse, les équations de bilans moyens formulées dans le paragraphe précédent contiennent 14 inconnues :

- α_k , $\overline{\rho_k}$ et $\overline{\mathbf{u}_k}$ pour le bilan de masse

- $\overline{p_k}$, $\overline{\tau_k^l}$, $\overline{\tau_k^t}$ et $\langle \mathbf{L}_k \rangle$ pour le bilan de quantité de mouvement

La fermeture du système d'équations du modèle à deux fluides nécessite que l'on ait autant d'équations que d'inconnues. Avec les 4 équations disponibles (deux par phase), il est possible d'explicitier les relations suivantes :

- Les taux de présence des deux phases sont reliés par la relation suivante : $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ pour des interfaces d'épaisseur nulle
- La masse volumique de la phase k, ρ_k est déterminée par une fonction d'état
- Le tenseur des contraintes visqueuses $\overline{\tau_k^l}$ peut être explicité par des lois de comportement relatives aux deux phases

Le problème de fermeture va alors concerner cinq inconnues. Si l'on souhaite obtenir un modèle permettant la description des champs de vitesses moyennes dans les deux phases et leur répartition dans le domaine de l'écoulement, il faut que l'on choisisse les vitesses moyennes dans chacune des phases et le taux de présence de l'une des phases comme inconnues principales. Il n'est donc pas possible de conserver les deux pressions phasiques comme inconnues principales et le problème de fermeture concerne donc :

- Le tenseur des contraintes turbulentes $\overline{\tau_k^t}$
- Le terme d'échange interfacial $\langle \mathbf{L}_k \rangle$
- La pression dans l'une des phases : il s'agit d'exprimer la pression moyenne dans l'une des phases en fonction de la pression dans l'autre.

La capacité des équations (1-24) et (1-25) à décrire le comportement physique d'un milieu diphasique dépend de la précision avec laquelle les fermetures vont restituer la perte d'information relative à la prise de moyenne des équations instantanées.

Dans la suite, nous nous limitons à des écoulements à bulles sans transfert de masse aux interfaces. Les fluides considérés sont supposés newtoniens à masses volumiques constantes. Dans ces conditions, le tenseur des contraintes visqueuses de la phase k s'écrit :

$$\tau_k^l = \rho_k \nu_k [\nabla \mathbf{u}_k + (\nabla \mathbf{u}_k)^T] \quad (1-32)$$

avec ν_k est la viscosité cinématique de la phases k . Nous négligeons également l'écoulement dans les bulles. Pour les écoulements à bulles millimétriques considérées ici, la vitesse en tout point de la bulle sera identifiée à la vitesse de son centre d'inertie.

1.3.2 Principes méthodologiques de la fermeture du modèle à deux fluides

Il n'existe pas de méthodes parfaitement déductives pour élaborer des fermetures des modèles à deux fluides. Comme pour les écoulements monophasiques turbulents, la procédure de fermeture consiste en une construction d'approximations cohérentes des termes inconnus par des formulations qui doivent obéir à des critères dictés par des considérations mathématiques et des principes généraux de la physique. Drew et Wallis (1992) développent dans le cas diphasique une méthodologie similaire permettant d'aboutir à la représentation la plus complète possible des interactions interfaciales dont nous résumons les critères généraux:

1.3.2.1 L'homogénéité

Ce critère correspond à l'homogénéité dimensionnelle dans la mesure où les termes de tout schéma de fermeture doivent avoir les mêmes dimensions que ceux qu'ils sont sensés de représenter. Il correspond également à l'homogénéité mathématique dans le sens où la nature tensorielle des termes inconnus doit être respectée.

1.3.2.2 Le comportement asymptotique

Le modèle diphasique conçu selon un schéma de fermeture doit dégénérer en l'absence de dispersion vers un modèle monophasique. Il doit également dégénérer dans la situation où la turbulence est exclusivement produite par les bulles vers un modèle fournissant des solutions compatibles avec les solutions théoriques connues.

1.3.2.3 La condition de réalisabilité

Ce critère consiste au fait que le modèle proposé ne doit pas reproduire des résultats irréalistes tels qu'à titre d'exemple une énergie négative ou une valeur négative d'un coefficient de corrélation censé être positif.

Ces principes méthodologiques constituent ainsi des conditions nécessaires pour tout schéma de fermeture. Leur vérification permet d'éviter le développement de comportements physiquement inacceptable.

1.3.3 Modélisation des interactions interfaciales

1.3.3.1 Position du problème

En l'absence de transfert de masse, les termes interfaciaux dans les bilans moyens de quantité de mouvement s'écrivent :

$$\langle \mathbf{L}_k \rangle = \langle (-p_k \mathbf{n}_{lk} + \boldsymbol{\tau}_k \cdot \mathbf{n}_{lk}) \delta_I \rangle \quad (1-33)$$

Ils représentent la densité volumique en un point donné de la force exercée par le liquide sur les surfaces des bulles. La modélisation de ces deux termes pose deux difficultés principales :

- La première est relative à la formulation, dans le cas général, de la force exercée par le liquide sur une inclusion isolée : l'expression exacte de cette force n'est connue que dans des cas asymptotiques d'écoulements de référence (écoulement potentiel de fluide parfait (Auton et al (1988)), écoulement rampant en régime de Stokes (Gatignol (1983))). L'extrapolation de ces résultats analytiques hors du domaine linéaire reste encore hypothétique. Mais on assiste depuis plusieurs années au développement des travaux numériques tel que ceux de Rivero et al (1991), Magnaudet et al (1995) etc. qui ont permis des avancées importantes.
- La seconde difficulté est relative au passage de l'information de nature lagrangienne que représente la force exercée par le liquide sur une particule isolée à une formulation eulérienne représentant cette force en un point donné de l'écoulement indépendamment de la phase

présente. Ceci soulève des problèmes théoriques qui n'ont été abordés que dans le cadre d'hypothèses restrictives d'homogénéité et de stationnarité du champ turbulent de la phase continue (Batchelor (1972), Lance (1986), Simonin et Viollet (1989)).

1.3.3.2 Formulation lagrangienne de la force exercée par le liquide sur une particule isolée

Le point de départ de la modélisation de l'échange interfacial est la formulation de la force exercée par le liquide sur une particule isolée. Green fût le premier à s'intéresser, en 1833, aux forces qui s'exercent sur une particule solide plongée dans un écoulement de fluide parfait. Stokes (1851) a ensuite résolu le problème de la traînée sur une sphère animée d'un mouvement stationnaire. Boussinesq (1885) et Basset (1888) ont mis en évidence, dès le 19^{ème} siècle, l'existence de forces autre que la traînée dans des écoulements accélérés. Ce n'est que depuis les années 70, grâce aux développements considérables des moyens informatiques, que des études par simulation numérique ont permis d'effectuer un grand pas dans la compréhension des différentes forces exercées par le fluide environnant sur une inclusion.

Dans l'état actuel des connaissances, la solution analytique donnant lieu à l'expression exacte de la force subie par une particule sphérique plongée dans un liquide en mouvement non uniforme n'est connue que dans les situations asymptotiques de l'écoulement rampant dit également régime de Stokes (Gatignol 1983 ; Maxey Riley 1983) ou de l'écoulement de fluide parfait (Voïnov 1973 ; Auton 1988). L'écoulement peut être considéré comme rampant lorsque :

$$R_{er} = \frac{u_R R}{\nu_L} < 1 \quad (1-34)$$

R_{er} est le nombre de Reynolds relatif bâti sur la vitesse relative et le rayon de la bulle. L'écoulement de fluide parfait correspond à un état asymptotique où R_{er} tend vers l'infini. les solutions établies dans ces situations limites se basent sur la décomposition du champ des contraintes en champ non perturbé rencontré lorsque le volume de la particule est occupé par le liquide et un champ perturbé engendré par la présence de la particule.

Pour les nombres de Reynolds intermédiaires, on ne dispose pas de solutions exactes et les expressions adoptées sont généralement fondées sur l'extrapolation des résultats dans les situations

asymptotiques en exploitant des données expérimentales (Odar et Hamilton (1964) ; Temkin et Mekta (1982)).

Nous présentons dans la suite quelques résultats caractéristiques concernant l'écriture exacte de la force exercée sur une particule et nous discutons ensuite l'extrapolation de ces résultats dans le cas général.

Solution théorique en écoulement rampant

Les travaux de Gatignol (1983) sont, à ce propos, les plus remarquables. Ils concernent l'étude des forces exercées par un fluide en écoulement instationnaire et non uniforme en régime de Stokes sur une particule solide. La méthode adoptée se base sur une décomposition de l'écoulement en écoulement perturbé et non perturbé par la particule. Elle permet d'écrire la force exercée par le fluide sur la particule sous la forme d'une superposition de deux contributions : la première est due au champ hydrodynamique non perturbé qui vérifie les conditions aux limites en l'absence de particule et le second est liée à la perturbation due à la présence de la particule.

Après linéarisation des systèmes décrivant ces contributions, Gatignol (1983) établit l'expression générale suivante de la force exercée par le fluide sur la particule sphérique rigide :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_I + \mathbf{F}_{II} \quad (1-35)$$

avec

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \rho_p v \mathbf{g} \quad (1-36)$$

$$\mathbf{F}_I = \rho v \left(\frac{d\mathbf{u}^{(v)}}{dt} - \mathbf{g} \right) \quad (1-37)$$

$$\mathbf{F}_{II} = 3\pi\mu d(\mathbf{u}^{(s)} - \mathbf{u}_p) + \frac{1}{2}\rho v \left(\frac{d\mathbf{u}^{(v)}}{dt} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \right) + \frac{3}{2}\rho d^2 \sqrt{\pi v} \int_{-\infty}^t \left(\frac{d\mathbf{u}^{(s)}}{d\tau} - \frac{d\mathbf{u}_p}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1-38)$$

Dans ces expressions les vitesses $\mathbf{u}^{(v)}$ et $\mathbf{u}^{(s)}$ désignent respectivement les moyennes sur la surface et le volume de la sphère de la vitesse de l'écoulement non perturbé de la phase continue, \mathbf{u}_p est la vitesse de la particule et \mathbf{g} est l'accélération de la pesanteur. Une étude des ordres de grandeur a permis à Gatignol de négliger le terme convectif devant le terme temporel dans la dérivée particulaire et de choisir la dérivée matérielle suivant la particule :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_p \cdot \nabla \quad (1-39)$$

Cette expression fait apparaître d'une manière cohérente l'origine des forces qui peuvent s'exercer sur une inclusion. Le terme \mathbf{F}_{ext} représente l'action des forces extérieures qui dans notre cas représentent l'action du champ de la pesanteur. Le terme \mathbf{F}_I représente l'action du champ non perturbé, il comprend la force de Tchen (premier terme) qui est une force d'inertie représentant la force que le fluide doit exercer sur une particule fluide équivalente à la particule solide pour qu'elle soit animée de l'accélération $\frac{d\mathbf{u}^{(v)}}{dt}$, cette force n'existe pas si le fluide est au repos ou en mouvement uniforme, et le poids du liquide (second terme) qui occupe le volume de la particule (poussée d'Archimède). Le terme \mathbf{F}_{II} représente l'action du champ perturbé par la présence de la particule. Cette action comprend :

- La force de traînée stationnaire de Stokes (premier terme), cette force est due à la non uniformité du champ des contraintes autour de l'inclusion. Elle apparaît dès lors qu'il y a mouvement relatif même s'il n'est pas accéléré.
- La force de masse ajoutée (second terme). C'est une force d'inertie de résistance instationnaire. Elle traduit la réaction du fluide sur la particule suite à une accélération relative de celle-ci.
- La force de Basset (dernier terme) appelée également force d'histoire. C'est une force de résistance qui apparaît dans le cas d'un mouvement relatif de la particule. L'interprétation physique de ce terme est délicate, toutefois Landeau et Lifchitz (1959) montrent qu'il a comme origine la diffusion visqueuse retardée à travers la couche limite de la quantité de mouvement.

Solution théorique en écoulement potentiel d'un fluide parfait

Voïnov (1973) a montré que la force dynamique exercée par un fluide parfait en écoulement non uniforme, instationnaire et irrotationnel sur une particule rigide s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F} = \rho v \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{g} \right) + \frac{1}{2} \rho v \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \right) \quad (1-40)$$

où les $\frac{D}{Dt}$ et $\frac{d}{dt}$ désignent respectivement les dérivées matérielles suivant les mouvements du fluide et de la particule, \mathbf{u} est la vitesse absolue du fluide en l'absence de la particule prise au centre

et \mathbf{u}_p est la vitesse absolue de celle ci. On voit apparaître dans cette expression le terme de Tchen et de la masse ajoutée qui s'écrivent d'une manière identique dans les cas extrêmes du nombre de Reynolds relatif. Auton et al (1988) ont généralisé ces résultats au cas d'écoulement parfait, non uniforme, instationnaire et rotationnel et ont considéré les écoulements autour d'un cylindre et d'une sphère. Ils montrent que la contribution du rotationnel à la force exercée par le fluide peut être superposée à la contribution du champ irrotationnel et établissent l'expression suivante de la force :

$$\mathbf{F} = \rho v \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{g} \right) + \rho v c_M \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \right) + c_L \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}) \quad (1-41)$$

avec : $c_M = 0.5$ et $c_L = 0.5$.

Le dernier terme qui apparaît dans cette expression représente l'action du champ rotationnel, il introduit la force de portance qui est exprimée en fonction de la vorticité de l'écoulement du fluide. Cette force est de même origine que la traînée : la non uniformité du champ des contraintes induit une force résultante dont la composante tangentielle à l'écoulement traduit la traînée et la composante normale traduit la portance.

Remarque :

La nature des d riv es qui interviennent au niveau des différentes forces a fait l'objet de nombreuses discussions. Il est alors intéressant d'en rappeler les principaux éléments :

- L'étude des ordres de grandeur a permis à Gatignol de négliger le terme convectif $\mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u})$ devant la dérivée temporelle $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$, ce qui lui permet de choisir la dérivée matérielle suivant la particule donn e par l'expression (1-39).
- un raisonnement similaire a conduit Maxey et Riley (1983)   un résultat semblable. Ils trouvent des expressions de même forme que celles obtenues par Gatignol. Toutefois, au niveau du terme de Tchen, ils aboutissent au choix de la dérivée suivant le fluide :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1-42)$$

Quant au terme de masse ajoutée, ils font intervenir la dérivée suivant la particule ( quation (1-39)).

- Minier a repris les travaux de Gatignol, il a montré que dans le cadre de l'hypothèse des nombres de Reynolds relatifs faibles, quelque soit le mouvement du fluide, on aura l'identité des deux opérateurs de dérivée : $\frac{d}{dt}$ et $\frac{D}{Dt}$. Le terme du champ non perturbé s'écrit ainsi sous la forme :

$$\mathbf{F}_1 = \rho v \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho v \mathbf{g} \quad (1-43)$$

- Auton et al (1988) font apparaître analytiquement dans le cas d'un écoulement parfait les deux opérateurs de dérivée dans l'expression de la force de la masse ajoutée (équation (1-41)).

Expression de la force dans le cas des nombres de Reynolds relatifs intermédiaires

Plusieurs travaux expérimentaux ont été réalisés pour tenter de mesurer la force subie par une particule sphérique solide submergée dans un liquide accéléré : chute d'une sphère dans un liquide au repos (Odar 1966), oscillation dans un liquide au repos (Odar et Hamilton 1964), oscillation du fluide autour d'une sphère (Schoenborn 1975). Cependant la difficulté de l'expérience ne permet pas d'évaluer d'une manière rigoureuse l'effet de l'accélération ainsi que la distinction entre les différentes contributions telles que la traînée stationnaire, la force d'inertie ou la force d'histoire.

Les travaux d'Odar Hamilton (1964) concernent l'étude de la force subie par une sphère plongée dans un liquide au repos et animée d'un mouvement oscillatoire. La sphère est immergée dans une cuve carrée remplie d'huile de côté $9d$ (d est le diamètre de la sphère), la fréquence de son mouvement est réglable ce qui a permis d'explorer la plage des nombres de Reynolds relatifs :

$$0 < Re < 64.$$

Ces expériences généralisent les résultats analytiques établis pour le cas des faibles nombres de Reynolds en introduisant des coefficients aux différents termes de l'expression de la résultante des forces dynamiques exercées par le fluide sur la sphère rigide. Cette force s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{F} = -\frac{c_x}{2} \rho R^2 |\mathbf{u}_p| \mathbf{u}_p - c_m \rho v \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} - 6c_H \rho R^2 \sqrt{\pi v} \int_{-\infty}^t \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \quad (1-44)$$

où v est le volume de la particule et c_x ; c_m et c_H sont respectivement les coefficients des termes de traînée, de masse ajoutée et d'histoire. ces coefficients sont ajustés à partir des données expérimentales et leurs valeurs sont données en fonction du nombre d'accélération

$$Ac = \frac{\vartheta \tau_0}{\lambda} \quad (1-45)$$

avec :

ϑ : ordre de grandeur de la vitesse du fluide

λ : une échelle de longueur caractéristique de la particule ($\lambda = R$)

τ_0 : un temps caractéristique de la particule

Ces coefficients sont donnés par :

$$c_x = c_{x0} \left(1 + \frac{1}{Ac}\right)^{1.2} \quad (1-46)$$

$$c_m = 1.05 - \frac{0.066}{(Ac^2 + 0.12)} \quad (1-47)$$

$$c_H = \frac{1}{6} \left[2.88 + \frac{3.12}{(Ac^2 + 1)^3} \right] \quad (1-48)$$

Plusieurs travaux ont été développés pour l'étude de la force de traînée exercée sur une inclusion de forme quelconque par les effets visqueux du fluide environnant. Cette force s'écrit en fonction du tenseur des contraintes visqueuses sous la forme exacte suivante :

$$F_D = \int_S \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} \, ds \quad (1-49)$$

Par analogie à la force de frottement elle sera exprimée à l'aide d'un coefficient de traînée qui sera donné dans le cas d'une particule à forme quelconque par la relation :

$$c_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho A_p \left| \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_p \right| \left(\overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{u}}_p \right)} \quad (1-50)$$

Plusieurs modélisations ont été proposées pour le coefficient de traînée (Ex: Hadamar et Rybczinsky (1911) ; Moore (1963)). La modélisation la plus pratique est celle de Wallis (1969). Elle a généralisé la traînée de Stokes pour des nombres de Reynolds plus grands dans le cas d'une sphère rigide en introduisant le coefficient empirique C_D donné par :

$$C_D = \frac{24}{Re}(1 + 0.15Re^{0.687}) \quad \text{si } Re < 1000 \quad \text{et } C_D = 0.44 \quad \text{si } Re > 1000 \quad (1-51)$$

Bel Fdhila et Duineveld (1996) trouvent une bonne correspondance entre des valeurs expérimentales de la traînée sur une bulle dans une eau contaminée et une autre expression du coefficient de traînée C_D pour des sphères rigides à grands nombre de Reynolds (Clift et al 1978) :

$$C_D = \frac{24}{Re}(1 + 0.1935Re^{0.6305}) \quad (1-52)$$

Nous signalons enfin que dans des travaux expérimentaux récents sur les écoulements à bulles à forts taux de vide homogène de Garnier et al (2002) et de zone de mélange, les auteurs constatent une atténuation significative de la vitesse de glissement des bulles qu'ils attribuent à une modification du coefficient de traînée C_D pour les forts taux de vide. Nous revenons sur cette question dans le chapitre 5.

La force de portance a également fait l'objet d'études dans plusieurs travaux. Auton et al (1988) ont établi analytiquement l'expression de cette force qui figure dans l'équation (1-41) en écoulement potentiel avec un coefficient égal à 0.5. En s'appuyant sur des travaux numériques Legendre et al (1998) ont mis en évidence une forte dépendance du coefficient de portance en fonction du nombre de Reynolds relatif. D'autre part, les travaux numériques de Rivero (1991) ont précisé la nature de la dérivée particulière qui intervient dans le terme de la masse ajoutée. Ils ont également confirmé la valeur 0.5 qui reste valable pour une plage de nombre de Reynolds relatif allant de 0.1 à 300. Ces travaux indiquent aussi que la force de Basset peut être négligée pour la plage des nombres de Reynolds relatifs étudiée.

1.3.3.3 Passage d'une description lagrangienne à une description eulerienne

A supposer qu'on dispose d'une formulation exacte de la force exercée par le liquide sur une inclusion, le problème est alors d'en déduire une modélisation des termes interfaciaux de transfert de quantité de mouvement. Il s'agit de définir une méthode théoriquement valable permettant de passer de l'information lagrangienne instantanée à une description macroscopique locale et moyennée. Nous nous proposons dans ce paragraphe de présenter un bref aperçu sur les différentes approches proposées.

Méthode d'homogénéisation

La méthode d'homogénéisation se base sur la définition en un point quelconque d'un volume V , dont l'échelle caractéristique de longueur est très petite devant l'échelle macroscopique L caractéristique du mouvement moyen, contenant un nombre N d'inclusions suffisamment grand. Le milieu diphasique contenu dans ce volume sera conçu comme étant un système physique à N particules identiques. Un état instantané de ce système sera décrit par le vecteur (C_N, \dot{C}_N) dans l'espace des phases formé par l'ensemble des positions des barycentres des inclusions C_N et de leurs vecteurs vitesses \dot{C}_N . La méthode d'homogénéisation se base sur la définition d'une densité de probabilité $f(C_N, \dot{C}_N, t)$ associée à la configuration (C_N, \dot{C}_N) à l'instant t : la quantité $\frac{1}{N!} f(C_N, \dot{C}_N, t) dC_N d\dot{C}_N$ représente la probabilité de trouver à l'instant t les inclusions dans l'élément de volume $(dC_N, d\dot{C}_N)$ centré sur (C_N, \dot{C}_N) .

Cette densité de probabilité vérifie la condition de normalisation suivante :

$$\frac{1}{N!} \int f(C_N, \dot{C}_N, t) dC_N d\dot{C}_N = 1 \quad (1-53)$$

Cette formulation permet de définir la moyenne d'ensemble diphasique en un point (\mathbf{x}, t) d'une grandeur $A(\mathbf{x}, t, C_N, \dot{C}_N)$ par la relation suivante :

$$\langle A \rangle = \frac{1}{N!} \int A(\mathbf{x}, t, C_N, \dot{C}_N) f(C_N, \dot{C}_N, t) dC_N d\dot{C}_N \quad (1-54)$$

La moyenne d'ensemble relative à une grandeur $A_G(\mathbf{x}_0, t, C_N, \dot{C}_N)$ liées à la phase dispersée est calculée en introduisant la densité de probabilité conditionnelle $f(C_N, \dot{C}_N, t / \mathbf{x}_0)$ correspondant à la configuration (C_N, \dot{C}_N) lorsqu'une inclusion occupe la position \mathbf{x}_0 :

$$\langle A_G \rangle = \frac{1}{N!} \int A_G(\mathbf{x}_0, t, C_N, \dot{C}_N) f(C_N, \dot{C}_N, t / \mathbf{x}_0) dC_N d\dot{C}_N \quad (1-55)$$

Tandis que la moyenne d'ensemble relative à une grandeur $A_L(\mathbf{x}_0, t, C_N, \dot{C}_N)$ dans le liquide est définie en introduisant la fonction définie sur l'ensemble des inclusions qui prend la valeur 1 quand \mathbf{x}_0 est dans le liquide et la valeur 0 sinon :

$$h(\mathbf{x}_0, t, C_N, \dot{C}_N) = 1 - \sum_{k=1}^{k=N} H(R - \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|, t, C_N, \dot{C}_N) \quad (1-56)$$

où H est la fonction de heaviside, R est le rayon de l'inclusion et \mathbf{x}_k les positions des barycentres des inclusions dans la configuration donnée. Cette moyenne est donnée par :

$$\langle A_L \rangle = \frac{1}{N!} \int A_L(\mathbf{x}_0, t, C_N, \dot{C}_N) h(\mathbf{x}, t, C_N, \dot{C}_N) f(C_N, \dot{C}_N, t / \mathbf{x}_0) dC_N d\dot{C}_N \quad (1-57)$$

Les conditions de normalisation dans cette démarche s'écrivent :

$$\frac{1}{N!} \int f(C_N, \dot{C}_N, t / \mathbf{x}_0) dC_N d\dot{C}_N = \alpha \quad (1-58)$$

$$\frac{1}{N!} \int h(\mathbf{x}, t, C_N, \dot{C}_N) f(C_N, \dot{C}_N, t) dC_N d\dot{C}_N = 1 - \alpha \quad (1-59)$$

où α est le taux de présence de la phase dispersée.

La difficulté de cette démarche consiste à la formulation des densités de probabilité $f(C_N, \dot{C}_N, t)$ et $f(C_N, \dot{C}_N, t / \mathbf{x}_0)$ qui ne sont connues que dans des cas très simplifiés (Batchelor 1972, Van Wijngaarden 1976, Biesheuvel et Van Wijngaarden 1984).

Méthode fondée sur la mécanique statistique des fluides

Cette méthode qui s'inspire de l'hydrodynamique des fluides (Massignon 1957) a été proposée par Lance (1986). Elle considère l'écoulement diphasique dispersé comme étant un fluide dans un volume V porteur de N inclusions. La description eulérienne macroscopique de l'écoulement diphasique sera déduite à partir d'un traitement des équations dynamiques des N particules qui s'écrivent :

$$\rho_G \vartheta^{(n)} \frac{d\mathbf{u}_G^{(n)}}{dt} = \mathbf{F}^{(n)} \quad \text{avec} \quad n = 1, \dots, N \quad (1-60)$$

où $\mathbf{F}^{(n)}$ est la force hydrodynamique exercée par le fluide sur la $n^{\text{ème}}$ inclusion. Cette force dépend en général des positions et des vitesses des (N-1) autres inclusions ce qui implique une dépendance entre les équations de ce système.

La démarche introduite par Lance (1986) consiste à construire un champ de vitesse eulérien et instantané à partir de ce système à N équations lagrangiennes. Pour cela, Lance (1986) définit la fonction caractéristique $\pi^{(n)}$ associée à l'inclusion (n) définie par :

$\pi^{(n)}(\mathbf{x}, t) = 1$ si à l'instant t x est dans la bulle.

$$\pi^{(n)}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad \text{sinon} \quad (1-61)$$

Lance (1986) montre que la fonction $\pi^{(n)}$ vérifie l'équation de conservation suivante :

$$\frac{\partial \pi^{(n)}}{\partial t} + \nabla \cdot (\pi^{(n)} \mathbf{u}_G^{(n)}) = 0 \quad (1-62)$$

où $\mathbf{u}_G^{(n)}$ représente la vitesse du centre de gravité de l'inclusion (n). La fonction caractéristique de la phase dispersée s'écrit alors :

$$\chi_G(\mathbf{x}, t) = \sum_{n=1}^N \pi^{(n)}(\mathbf{x}, t) \quad (1-62)$$

On en déduit l'équation de conservation de la fonction caractéristique χ_G qui s'écrit :

$$\frac{\partial \chi_G}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{J}) = 0 \quad \text{avec} \quad \mathbf{J} = \sum_{n=1}^N \pi^{(n)} \mathbf{u}_G^{(n)} \quad (1-63)$$

L'équation (1-63) fournit ainsi une description eulérienne, au point (\mathbf{x}, t) , de l'évolution de la géométrie de l'écoulement. Lance (1986) établit également l'équation de bilan de quantité de mouvement qui s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{F}}{\rho_G} \quad (1-64)$$

avec :

$$\mathbf{P} = \sum_{n=1}^N \pi^{(n)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}_G^{(n)} \mathbf{u}_G^{(n)} \quad \text{et} \quad \mathbf{F} = \sum_{n=1}^N \pi^{(n)}(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}^{(n)} \quad (1-65)$$

L'équation (1-65), écrite en variables d'Euler, est équivalente aux N équations lagrangiennes (1-60) du mouvement. Un traitement statistique des équations (1-63) et (1-64) permet alors de déduire une description eulérienne en grandeurs moyennes du milieu diphasique dispersé.

Méthode fondée sur la notion de la densité locale de force

Cette méthode a été introduite par Simonin et Viollet (1989) et adoptée depuis par plusieurs auteurs (Ex : Belfdhila et Simonin (1992), Roig (1993), Chahed (1999)). Elle se base sur la description de l'action de la phase continue sur la phase dispersée en tout point de l'écoulement par une densité volumique de force. Cette formulation suppose cependant que la taille des bulles est suffisamment faible pour que l'hypothèse d'homogénéité à l'échelle de la bulle reste valable.

Les équations eulériennes de bilans instantanés de quantité de mouvement dans les deux phases s'écrivent :

$$\chi_L \rho_L \frac{\tilde{D}\mathbf{u}_L}{\tilde{D}t} = \chi_L \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L + \chi_L \rho_L \mathbf{g} \quad (1-66)$$

$$\chi_G \rho_G \frac{\tilde{D}\mathbf{u}_G}{\tilde{D}t} = \chi_G \mathbf{f}_p + \chi_G \rho_G \mathbf{g} \quad (1-67)$$

avec $\frac{\tilde{D}}{\tilde{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_L \cdot \nabla$ est la dérivée particulaire en suivant le mouvement instantané de la phase liquide et \mathbf{f}_p est la densité volumique de la force exercée par le liquide sur la phase dispersée. Cette densité de force s'exprime en fonction du tenseur des contraintes dans la phase liquide par la relation suivante :

$$\mathbf{f}_p = \frac{1}{\vartheta_B} \int_{\Sigma} \boldsymbol{\sigma}_L \cdot \mathbf{n} \, ds = \frac{1}{\vartheta_B} \int_{\vartheta_B} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L) \, d\tau \quad (1-68)$$

où ϑ_B désigne le volume d'une bulle délimitée par la surface Σ .

Si l'on admet l'homogénéité spatiale des moments à l'ordre 1 et 2 à l'échelle du diamètre d'une bulle, nous pouvons identifier les densités volumiques de forces à leurs moyennes volumiques et établir par conséquent l'égalité suivante :

$$\mathbf{f}_p = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L \quad (1-69)$$

La densité de force est exprimée comme la somme des contributions de l'écoulement perturbé et de l'écoulement non perturbé par la présence de la phase dispersée, nous écrivons ainsi :

$$\mathbf{f}_p = \mathbf{f}_p^{(0)} + \mathbf{f}_p^{(1)} \quad (1-70)$$

Soient $\mathbf{u}_L^{(0)}$ et $\boldsymbol{\sigma}_L^{(0)}$ les champs des vitesses et des contraintes de l'écoulement non perturbé, les deux contributions s'expriment sous la forme :

$$\mathbf{f}_p^{(0)} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L^{(0)} \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_p^{(1)} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}_L^{(1)} \quad (1-71)$$

La prise de moyenne des équations instantanées (1-66) et (1-67) conduit aux résultats suivants:

$$\rho_L \alpha_L \frac{D\overline{\mathbf{u}}_L}{Dt} = \alpha_L \nabla \cdot \overline{\boldsymbol{\sigma}}_L - \rho_L \nabla \cdot (\alpha_L \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}) + \alpha_L \rho_L \mathbf{g} - \mathbf{M}_G \quad (1-72)$$

$$\rho_G \alpha_G \frac{D\overline{\mathbf{u}}_G}{Dt} = \alpha_2 (\nabla \cdot \langle \boldsymbol{\sigma}_1^{(0)} \rangle) - \rho_G \nabla \cdot (\alpha_G \overline{\mathbf{u}'_G \mathbf{u}'_G}) + \alpha_G \rho_G \mathbf{g} + \mathbf{M}_G \quad (1-73)$$

avec :

$$\mathbf{M}_G = \langle \chi_G \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'^{(0)}_L \rangle + \langle \chi_G \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^{(1)}_L \rangle \quad (1-74)$$

qui s'exprime, compte tenu de la formulation lagrangienne de la force qui s'exerce par le liquide sur une inclusion, comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G = & \langle \chi_G \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}'^{(0)}_L \rangle - \langle \chi_G \frac{3}{4} \rho_L \frac{C_D}{d} |\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L^{(0)}| (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L^{(0)}) \rangle - \langle \chi_G \rho_L C_A (\frac{\tilde{d}}{\tilde{dt}} \mathbf{u}_G - \frac{\tilde{D}}{\tilde{Dt}} \mathbf{u}_L^{(0)}) \rangle \\ & - \langle \chi_G 2\rho_L C_L \boldsymbol{\omega}^{(0)} \times (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L^{(0)}) \rangle \end{aligned} \quad (1-75)$$

Nous revenons sur cette approche dans le chapitre 4 dans la présentation du modèle à deux fluides.

Méthode basée sur la définition d'une distribution des inclusions dans l'espace des phases

Cette méthode décrite par Haynes (2004) est fondée sur la définition à un instant donné d'une distribution des inclusions dans l'espace des phases. En effet, selon une approche similaire à celle décrite pour la méthode d'homogénéisation, le milieu diphasique dispersé est conçu comme un système à n_p particules où n_p est le nombre moyen d'inclusions par unité de volume. Une configuration instantanée de l'écoulement sera décrite par un vecteur dans l'espace des phases. On introduit ainsi le nombre probable f_p des centres d'inclusions localisées autour d'un point $(\mathbf{x}, \mathbf{c}_p)$ de l'espace des phases. La valeur moyenne d'une grandeur physique Φ_G associée à la phase dispersée sera définie à partir de cette distribution selon la relation :

$$\langle \Phi_G \rangle = \frac{1}{n_p} \int \Phi_G f_p d\mathbf{c}_p \quad (1-76)$$

avec la condition de normalisation :

$$n_p = \int f_p d\mathbf{c}_p \quad (1-77)$$

la difficulté de cette approche réside dans la définition de la distribution f_p . Plusieurs auteurs l'interprètent comme la moyenne de réalisations des variables positions-vitesses des inclusions (Zaichik et Derevich (1988), Reeks (1991)) qu'ils décrivent à l'aide d'une équation de transport.

1.3.4 Modélisation de la turbulence dans les écoulements à bulles

La présence des bulles dont le diamètre est de quelques millimètres introduit en général une échelle de longueur supérieure à l'échelle de Kolmogorov et une vitesse relative de déplacement des bulles supérieure aux fluctuations turbulentes de vitesse dans la phase continue (Lance et al, 1996). Il en résulte que les mécanismes de production de transfert et de dissipation de l'énergie turbulente peuvent être considérablement modifiés. Lance et Bataille (1990) dans leur étude des écoulements homogènes à bulles, évoquent trois types de mécanismes :

1. Le premier concerne les fluctuations turbulentes supplémentaires générées par les bulles dans leur mouvement relatif. C'est typiquement le genre de fluctuations qu'on peut enregistrer dans le cas d'ascension des bulles dans un liquide au repos (Mareuge et Lance, 1995).
2. Le second mécanisme est relatif à la production turbulente par cisaillement au niveau des sillages des bulles.
3. Le dernier est attribué à la déformation des bulles sous l'action des structures turbulentes du liquide. Ce mécanisme subsiste même à faible taux de vide lorsque l'interaction entre les bulles peut être négligée. Bien qu'il soit assez peu étudié dans la littérature, ce mécanisme semble être important. Serizawa et Kataoka (1990) montrent que la déformation des bulles est susceptible d'absorber l'énergie turbulente du liquide et modifier la dissipation.

Ces mécanismes sont loin d'être indépendants, ils interagissent avec le champ de l'écoulement moyen et également entre eux. Ils introduisent également des effets de couplage non-linéaires. La modélisation des écoulements turbulents à bulles doit donc tenir compte de ces aspects en tentant de les introduire dans les modélisations des différents mécanismes de la turbulence.

1.3.4.1 Equations de transport du tenseur de Reynolds et de l'énergie turbulente dans le liquide en milieux diphasiques dispersés

Les équations de transport des tensions de Reynolds dans le liquide peuvent être obtenues de manière exacte en écoulement diphasique dispersé. En première étape, l'équation de transport de la fluctuation de vitesse est déduite par soustraction de l'équation de la vitesse moyenne de celle de la vitesse instantanée. En seconde étape on multiplie cette équation par la fluctuation de vitesse et on ajoute l'équation obtenue à sa transposée et on applique l'opérateur de moyenne. On obtient l'équation de transport des contraintes de Reynolds, Lance (1986).

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt}(\alpha_L \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}) = & -\alpha_L \left[\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L \cdot \nabla \mathbf{u}_L} + \overline{(\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L \cdot \nabla \mathbf{u}_L)^T} \right] + \left[-2\nu \alpha_L \overline{\nabla \mathbf{u}'_L \cdot (\nabla \mathbf{u}'_L)^T} + \nu \overline{\nabla \cdot (\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L \mathbf{n}_I \delta^I)} \right] \\
 & + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \overline{p'(\nabla \mathbf{u}'_L + (\nabla \mathbf{u}'_L)^T)} - \nabla \cdot \left[\alpha_L \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} - \nu \nabla (\alpha_L \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}) + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \overline{p'(\mathbf{I} \mathbf{u}'_L + (\mathbf{I} \mathbf{u}'_L)^T)} \right] \\
 & + \overline{-\left(\frac{p'}{\rho_L} \mathbf{u}'_L \mathbf{n}_I + \frac{p'}{\rho_L} (\mathbf{u}'_L \mathbf{n}_I)^T \right) \delta^I + \nu \nabla (\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L) \cdot \mathbf{n}_I \delta^I}
 \end{aligned} \tag{1-78}$$

Cette équation fait apparaître des termes équivalents à ceux rencontrés dans le cas monophasique et qui sont pondérés par le taux de présence de la phase liquide. On peut distinguer dans le second membre respectivement les termes de production par le gradient de vitesse moyenne, de dissipation visqueuse, de redistribution par la pression, de diffusion et un terme spécifique aux écoulements diphasiques traduisant le mécanisme de production interfaciale :

$$\mathbf{P} = \overline{-\left(\frac{p'}{\rho_L} \mathbf{u}'_L \mathbf{n}_I + \frac{p'}{\rho_L} (\mathbf{u}'_L \mathbf{n}_I)^T \right) \delta^I + \nu \nabla (\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L) \cdot \mathbf{n}_I \delta^I} \tag{1-79}$$

Ce terme interfacial peut être exprimé sous la forme de corrélations entre les fluctuations de vitesse et les fluctuations du tenseur des contraintes sur les interfaces :

$$\mathbf{P} = \overline{\tau \mathbf{u}'_L \delta^I} + \overline{(\tau \mathbf{u}'_L)^T \delta^I} \tag{1-80}$$

avec

$$\tau = \left(-\frac{p'}{\rho_L} \mathbf{I} + \nu \nabla \mathbf{u}'_L \right) \cdot \mathbf{n}_I \tag{1-81}$$

Cette écriture permet d'interpréter le terme interfacial comme la puissance développée par les fluctuations des contraintes aux interfaces dans le mouvement fluctuant. Dans le cas où la phase dispersée est constituée de particules solides, Lance (1986) montre que les conditions d'imperméabilité et de non glissement à l'interface permettent d'identifier les composantes normales et tangentielles des vecteurs vitesse dans le liquide et sur la particule (indice p) de sorte qu'il devient possible d'établir :

$$\overline{\tau \mathbf{u}'_L \delta^I} = \overline{\mathbf{M}(\mathbf{u}_p - \mathbf{u}_L)} + \overline{\tau \mathbf{u}'_p \delta^I} \tag{1-82}$$

où $\overline{\mathbf{M}}$ est la contrainte exercée par le liquide sur la phase dispersée à l'interface. Dans le cas où la phase dispersée est gazeuse, les conditions à l'interface deviennent des conditions d'imperméabilité et de nullité des contraintes tangentielles et le résultat (1-82) n'est plus valable que pour la trace du tenseur.

L'équation de transport de l'énergie turbulente k_L est déduite en calculant la demi trace de l'équation (1-78), elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt}(\alpha_L \overline{k_L}) = & -\alpha_L \left[\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} : \nabla \overline{\mathbf{u}_L} \right] + \left[-\nu \alpha_L \overline{\nabla \mathbf{u}'_L} : (\nabla \mathbf{u}'_L)^T + \frac{1}{2} \nu \nabla \cdot ((\mathbf{u}'_L \cdot \mathbf{u}'_L) \mathbf{n}_I \delta^I) \right] \\ & - \frac{1}{2} \nabla \cdot \left[\alpha_L \overline{\mathbf{u}'_L \cdot (\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L)} - \nu \nabla \cdot (\alpha_L k_L) + \frac{\alpha_L}{\rho_L} \overline{p' \mathbf{u}'_L} \right] + \frac{P_0}{2} \end{aligned} \quad (1-83)$$

avec $P_0 = \mathbf{P} : \mathbf{I}$ est la trace du tenseur \mathbf{P} . Le terme de production interfaciale dans l'équation (1-83) de transport de k_L s'écrit alors compte tenu de (1-82) comme suit :

$$\frac{1}{2} P_0 = \overline{\mathbf{M} \cdot (\mathbf{u}_d - \mathbf{u}_L)} + \overline{\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}'_d \delta^I} \quad (1-84)$$

Ce résultat montre que la production interfaciale de l'énergie turbulente correspond d'une part à la puissance développée par la force d'interaction interfaciale dans le mouvement relatif moyen et d'autre part à la puissance des fluctuations des contraintes associées aux fluctuations de vitesse des interfaces.

Plusieurs travaux de modélisation ont permis de développer des modèles eulériens à deux fluides avec fermeture en un point au premier et au second ordre de la turbulence. Ces différents modèles seront présentés dans le second chapitre et seront commentés vis-à-vis à leurs aptitudes à rendre compte des observations expérimentales dans les situations simples de turbulence homogène en écoulement uniforme et avec cisaillement constant. Cette analyse nous conduit à proposer une forme de classification des modèles de turbulence proposés pour les écoulements à bulles et d'en déduire le niveau minimum de fermeture nécessaire pour prendre en compte les effets interfaciaux sur la structure de la turbulence en écoulement à bulles.

1.3.5 Pressions phasiques

Nous avons évoqué plus haut que la fermeture du modèle à deux fluides impose que l'on exprime la pression dans l'une des deux phases en fonction de la pression dans l'autre. Plusieurs travaux (Drew et Wood 1985 ; Lopez de Bertodano et al 1990 ; Lahey et Lopez de Bertodano 1991 ; Antal et al 1991), ont proposé d'exprimer la différence de pression entre les deux phases sous la forme générale :

$$\overline{p_G} - \overline{p_L} = (\overline{p_G} - \overline{p_{GI}}) + (\overline{p_{GI}} - \overline{p_{LI}}) + (\overline{p_{LI}} - \overline{p_L}) \quad (1-85)$$

où $\overline{p_{ki}}$ est la pression interfaciale du côté de la phase k. La différence de pression $(\overline{p_G} - \overline{p_{GI}})$ est souvent négligée ainsi, dans la plupart des travaux, on adopte la relation :

$$\overline{p_G} = \overline{p_{GI}} \quad (1-86)$$

La différence des deux pressions interfaciales est créée par les tensions superficielles et de contraintes de cisaillement à l'interface. Antal et al (1991) expriment cette différence de pression comme suit :

$$(\overline{p_{GI}} - \overline{p_{LI}}) = -\frac{4\sigma}{d} - \tau_i \quad (1-87)$$

où τ_i est le tenseur de cisaillement à l'interface qui nécessite une modélisation. On remarque que pour respecter la cohérence tensorielle de l'équation (1-87) il faut que les termes non diagonaux de τ_i soient nulles, cela n'a pas de justification physique.

Lopez de Bertodano et al (1990) et Lahey et Lopez de Bertodano (1991) adoptent la solution en écoulement potentiel autour d'une sphère, (Lamb 1932 ; Stuhmiller 1977), pour exprimer la différence de pression $(\overline{p_{LI}} - \overline{p_L})$. Cette différence s'écrit :

$$(\overline{p_{LI}} - \overline{p_L}) = -\frac{1}{4}\rho \left| \overline{u_G} - \overline{u_L} \right|^2 \quad (1-88)$$

Cette relation exprime un effet de Bernouilli dans la phase liquide caractérisé par une décroissance de la pression lorsqu'on se rapproche dans la phase liquide de l'interface due à l'augmentation de la vitesse.

Il faut noter que toutes les relations proposées sont déduites à partir de l'étude de l'écoulement autour d'une inclusion sphérique isolée. Il n'est pour autant pas assuré que ces résultats conviennent à la description physique de la différence des pressions phasiques dans les écoulements à bulles.

Plusieurs auteurs (Drew et Lahey 1982 ; Simonin et Viollet 1990 ; Troshko et Hassan 2001) adoptent l'égalité des pressions moyennes phasiques dans les écoulements gaz-liquide. Cela suppose que la pression exercée en un point par un écoulement dispersé ne dépend pas de la phase ce qui est assez acceptable dans le cas des bulles millimétriques supposées indéformables.

1.4 Retour à l'expérience

1.4.1 Introduction

Les travaux de modélisation des écoulements diphasiques se sont largement inspirés de l'expérience acquise dans l'étude des écoulements turbulents monophasiques. La fermeture des modèles eulériens à deux fluides s'appuie donc sur une approche phénoménologique essentiellement fondée, comme dans la modélisation par fermeture en un point employée en écoulement monophasique, sur l'analyse théorique, l'analyse dimensionnelle et l'analyse d'expériences d'écoulements à bulles en configurations de référence.

Plusieurs expériences, réalisées au cours des deux dernières décades, ont établi des descriptions locales d'écoulements gaz-liquide dispersés dans des configurations de base :

- Ecoulement homogènes : Lance et Bataille (1991), Lance et al (1991)
- Ecoulements cisailés minces : Roig (1993)
- Ecoulements en présence de paroi : Moursali et al (1995), Gabillet et al (1998)
- Ecoulements en conduites : Serizawa et al (1974), (1990), Wang et al (1987), Liu et Bankoff (1990)).

Ces résultats expérimentaux mettent en évidence l'important effet de la présence des phases sur la structure des champs moyens et fluctuants. Ils montrent également que le champ moyen des forces interfaciales et la turbulence du liquide contrôlent la distribution spatiale des phases mettant en évidence les forts couplages entre champs moyens, champs fluctuant et champs de taux de présence des deux phases. L'étude de ces couplages est déterminante tant pour la compréhension des mécanismes d'interaction en milieux diphasiques qu'en regard de tout objectif de modélisation.

L'identification et la compréhension de ces mécanismes lorsqu'ils agissent simultanément, sont complexes et il est utile de procéder à une forme de classification des bases de données expérimentales dans les configurations d'écoulements à bulles de base de sorte que l'on puisse les isoler dans certaines configurations d'écoulement pour progresser graduellement dans la compréhension de ces mécanismes. Cette forme de classification, sans qu'elle soit exhaustive vise à structurer l'étude des couplages entre mouvement moyen et fluctuant et la distribution des phases selon un degré de complexité croissant.

La figure (1- 2) ci-dessous illustre les couplages pouvant se produire dans un écoulement diphasique dispersé. Ces couplages que nous qualifions "d'explicités" comprennent :

- Les couplages mis en jeu par les termes interfaciaux (1-29) qui apparaissent dans les équations (1-25) de bilans de quantité de mouvement
- Les couplages entre le mouvement moyen et fluctuant dans chacune des phases mis en jeu par la production des fluctuations turbulentes par le gradient de vitesse moyenne qui se manifestent à travers le terme $\nabla \cdot [\alpha_k \overline{\tau_k^t}]$ dans le bilan (1-25) de quantité de mouvement et à travers le terme de production par cisaillement $-\alpha_L [\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}_L + (\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} \cdot \nabla \overline{\mathbf{u}}_L)^T]$ dans l'équation (1-78) de transport du tenseur de Reynolds.
- Les couplages induits par l'effet de la paroi ainsi que des conditions aux limites.

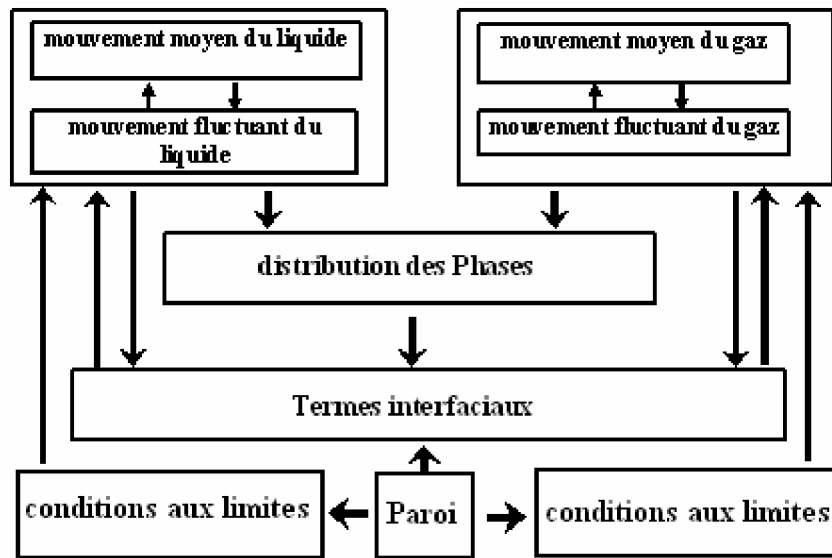


Figure (1-2) : couplages explicites en écoulements à bulles

On peut également distinguer des couplages que nous qualifions "d'implicites" et qui se traduisent par l'influence de la présence de la phase dispersée sur les mécanismes de production, de diffusion turbulente, de redistribution et de dissipation de la turbulence de la phase continue que nous symbolisons sur la figure (1-3).

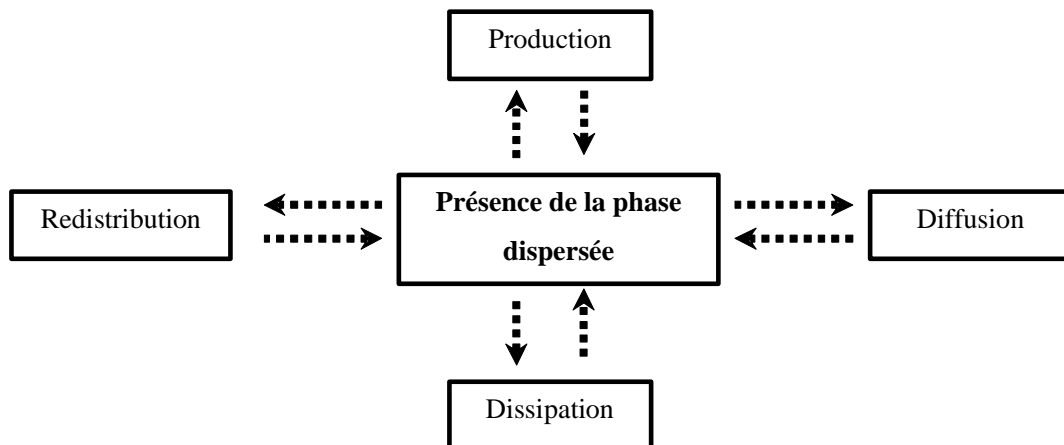


Figure (1-3) : couplages implicites en écoulements à bulles

Si l'on considère en particulier les couplages explicites et implicites induits par la présence de la phase dispersée, ils seraient considérablement simplifiés si la phase dispersée est uniformément répartie spatialement. Cette hypothèse est réalisée dans les expériences d'écoulements homogènes à bulles d'où on déduit le premier critère de classification lié à l'homogénéité de l'écoulement.

Dans les écoulements inhomogènes la non uniformité (spatiale ou temporelle) de la répartition des phases et des gradients de vitesses moyennes fait que tous les couplages implicites et explicites représentés dans les figures (1-2) et (1-3) interviennent. Cependant, l'étude des écoulements inhomogènes peut également s'envisager graduellement en introduisant pour cela un deuxième critère de classification lié aux hypothèses de simplification du tenseur de gradient de vitesse moyenne de la phase continue (Ex : bidimensionnalité de l'écoulement ; présence ou non de paroi).

1.4.2 Ecoulements homogènes à bulles

Les expériences de turbulence homogène en écoulements à bulles correspondent à des écoulements à taux de vides uniformes en moyenne avec ou sans écoulement liquide. L'écoulement liquide pouvant être uniforme ou uniformément cisaillé. Les données expérimentales disponibles sont aujourd'hui assez complètes (Lance et Bataille (1991), Lance et al (1991), Mareuge et al (1995), Garnier et al (2002), Larue de Tournemine (2001)). Leur analyse a permis une avancée importante dans la compréhension des mécanismes d'interaction dans ces écoulements. Outre l'uniformité de répartition des phases, la situation homogène permet en plus un découplage entre les mouvements moyen et fluctuant dans le liquide de telle sorte qu'il n'y a pas rétro-action du mouvement fluctuant sur le mouvement moyen ainsi qu'une absence du phénomène de diffusion. Les figures (1-2) et (1-3) se réduisent dans ce cas aux figures suivantes :

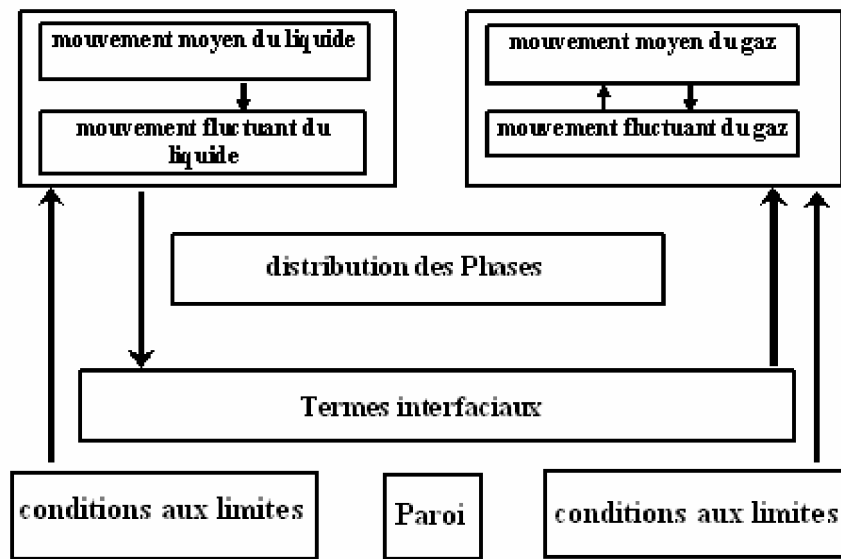


Figure (1-4) : couplages explicites en écoulements homogènes à bulles

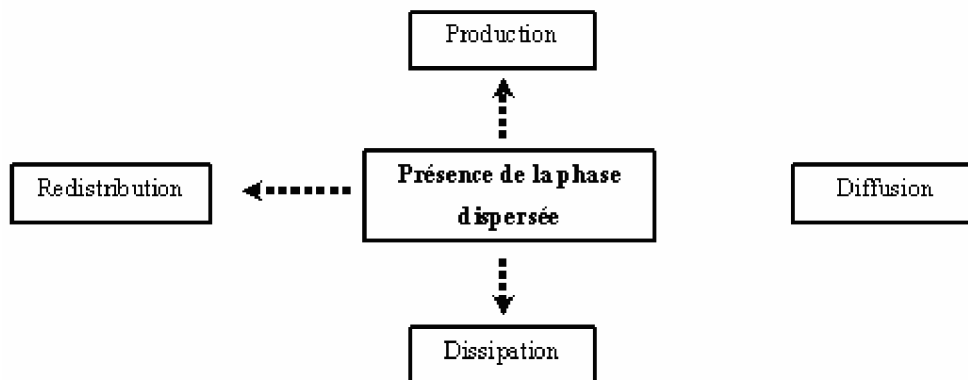


Figure (1-5) : couplages implicites en écoulements homogènes à bulles

L'expérience de Mareuge et Lance (1995) correspondant à l'ascension des bulles à faibles taux de vide dans un liquide au repos permet de focaliser l'étude sur les aspects caractéristiques de la production par les interactions interfaciales ainsi que sur la structure du champ fluctuant induit par les bulles. L'étude de la décroissance de la turbulence à l'aval de la grille en écoulement à bulles à faible taux de vide (Lance et Bataille (1991)) permet d'étudier la superposition de la turbulence induite par les bulles à celle générée par la grille ainsi que l'influence des bulles sur le mécanisme de dissipation. Les travaux de Lance et al (1991) en turbulence homogène à bulles uniformément cisailé constitue une continuité logique de ce qui précède. En situation monophasique, l'adjonction d'un gradient de vitesse moyenne du liquide introduit une production par cisaillement de la

turbulence dans la direction longitudinale de l'écoulement. La turbulence est alors à caractère anisotrope et l'étude de la structure du champ fluctuant permet d'analyser les mécanismes de redistribution de la turbulence dans une situation simple. L'étude de l'écoulement diphasique avec le même taux de cisaillement permet alors d'analyser l'influence de la présence des bulles sur les mécanismes de production et de redistribution de la turbulence. Toutes ces expériences ont été réalisées avec des faibles taux de vide. la réalisation d'écoulements turbulents à forts taux de vide (Garnier et al 2002) ; Larue de Tournemine 2002) permet alors de focaliser l'étude sur l'effet des interactions hydrodynamiques entre bulles sur la structure de l'écoulement diphasique.

1.4.3 Ecoulements inhomogènes à bulles

Les écoulements à bulles turbulents libres sont caractérisés par la non uniformité des tenseurs de gradient de vitesse moyenne dans les deux phases et de la répartition du taux de vide. Ils se développent selon une direction privilégiée sans être soumis à aucune contrainte de paroi. Ces écoulements introduisent par rapport aux écoulements homogènes les différents couplages entre les mouvements moyens, turbulents et la répartition des phases montrés par les figures (1-2) et (1-3) tout en évitant les difficultés liées à la présence de paroi.

Les écoulements à bulles de paroi peuvent également être étudiés graduellement selon un sens croissant de complexité en partant de l'écoulement de couche limite à bulles jusqu'aux écoulements à bulles à géométries complexes. La configuration d'écoulement de conduite à bulles en microgravité (Kamp et al 1995) est particulièrement intéressante dans la mesure où elle élimine les transferts interfaciaux de quantité de mouvement puisque la vitesse de glissement est nulle. Dans ce cas les schémas des couplages explicites et implicites se réduisent ainsi :

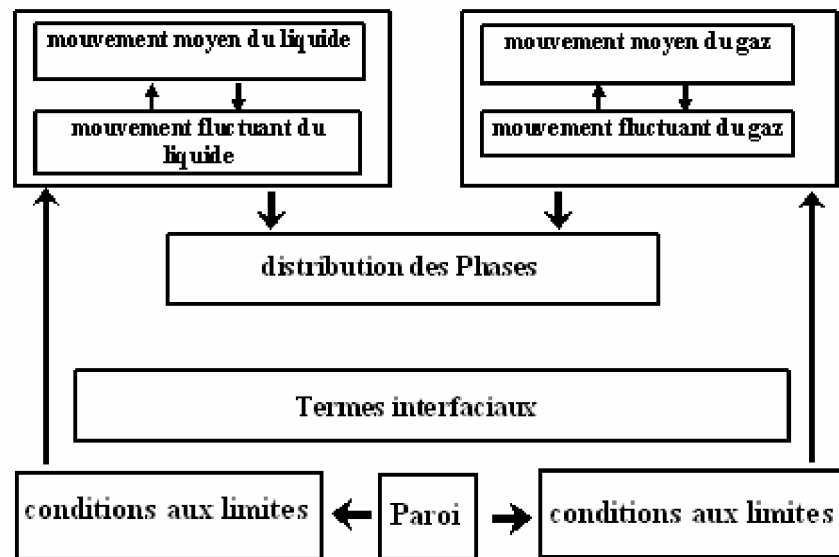


Figure (1-6) : couplages explicites en écoulements en conduite verticale à bulles en microgravité

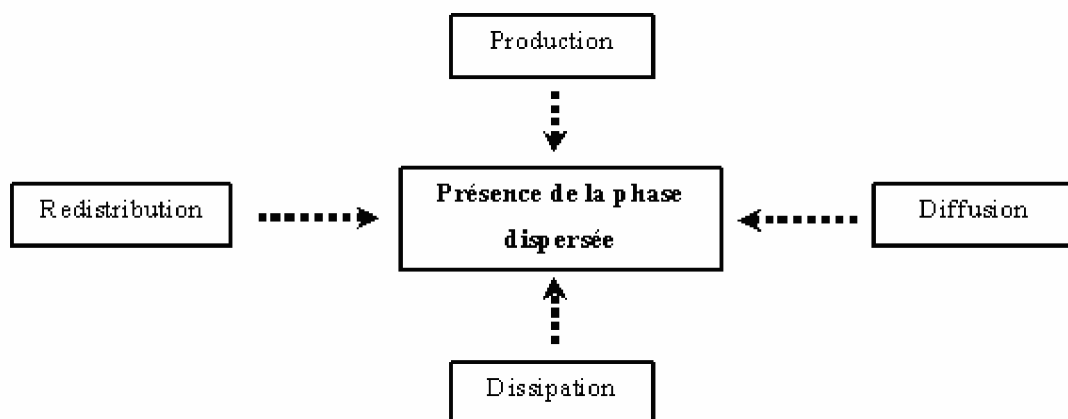


Figure (1-5) : couplages implicites en écoulements en conduite verticale à bulles en microgravité

Nous répertorions dans le tableau (1-1) les expériences réalisées dans les diverses configurations d'écoulements turbulents inhomogènes à bulles.

Tableau (1-1) : Expériences en écoulements à bulles inhomogènes

Catégorie de l'écoulement	Configuration de l'écoulement	Expériences
Ecoulement à bulles en turbulence libre	Sillage à bulles à faible taux de vide	Roig (1993)
	Zone de mélange à bulles à faible taux de vide	Roig (1993)
	Jet à bulles à faibles taux de vide	Sun et al (1986)
	Zone de mélange à bulles à fort taux de vide	Larue de Tournemine (2001)
Ecoulement à bulles turbulent de paroi	Ecoulement à bulles en conduite verticale en microgravité	Kamp et al (1995)
	Couche limite à bulles	Moursali et al (1995).
		Gabillet et al (1998)
	Ecoulement à bulles en conduite	Serizawa et al (1975)
		Michiyoshi et Serizawa (1986)
		Wang et al (1987)
		Liu et Bankoff (1987)
		Serizawa et al (1992)
		Grossetête (1995)
	Ecoulement à bulles à géométrie complexe (élargissement brusque)	Bel Fdhila (1991)

1.5 Apports de la simulation numérique

La simulation numérique constitue actuellement un outil performant d'investigation et de reproduction des écoulements turbulents à bulles. En réalisant des "expériences numériques", la simulation permet d'analyser les interactions entre les phases et d'évaluer les fermetures.

Comme pour l'écoulement monophasique, on retrouve dans différentes recherches relatives à la simulation des écoulements diphasiques, les techniques de simulation numérique directe (DNS) et de la simulation des grandes échelles (LES).

D'un point de vue physique, les écoulements turbulents diphasiques mettent en jeu des échelles supplémentaires associées aux caractéristiques de la phase dispersée. La pertinence des méthodes de simulation dépend du niveau de description qu'elles permettent et donc des échelles caractéristiques qu'elles reproduisent. Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner un aperçu sur les différentes classes des méthodes de simulation numérique des écoulements à bulles.

1.5.1 Approche par simulation numérique directe (DNS)

D'un point de vue théorique, la simulation numérique directe constitue la meilleure reproduction des écoulements turbulents à bulles puisqu'elle ne nécessite aucune modélisation explicite de la turbulence. Elle consiste à la résolution des équations instantanées de bilans de masse et de quantité de mouvement (de Navier Stokes) dans chacune des phases avec la prise en compte des conditions aux limites aux interfaces qui meuvent dans le domaine du calcul numérique de l'écoulement (Hirt et Nichols 1981; Tomiyama et al. 1994; Susuman et al. 1994; Unverdi et Triggvason 1992; Takagi et Matsumoto 1997).

Cette approche reste cependant limitée aux faibles nombres de Reynolds et à un nombre réduit de bulles à cause de son coût excessif sur le plan du calcul numérique. En effet, à grand nombre de Reynolds la reproduction des échelles caractéristiques des fluctuations turbulentes au niveau des sillages des bulles nécessite une très grande résolution spatiale.

Une deuxième méthode est également utilisée dans le cadre de la simulation numérique directe des écoulements à bulles selon laquelle on néglige l'écoulement à l'intérieur des bulles. Ces dernières sont supposées indéformables dont les trajectoires sont calculées à partir des équations du mouvement qui s'écrivent pour N bulles de volume ϑ_p et de densité ρ_p ($P = 1, \dots, N$) comme suit :

$$\frac{d\mathbf{x}_p}{dt} = \mathbf{u}_p \quad (1-89)$$

$$\rho_p \vartheta_p \frac{d\mathbf{u}_p}{dt} = \mathbf{F}_p \quad (1-90)$$

où \mathbf{x}_p et \mathbf{u}_p représentent respectivement la position et la vitesse de la bulle et \mathbf{F}_p est la force exercée par le liquide sur celle-ci. Les bulles sont ainsi modélisées par des points matériels dispersés sources de quantité de mouvement. Leur effet sur l'écoulement de la phase liquide est pris en compte par l'introduction dans les équations instantanées monophasiques de termes sources sous la forme d'une distribution représentant la force exercée par les inclusions sur le liquide (Squires et Eaton (1990); Elgobashi et Truesdel (1993); Boivin et al. (2000); Sandaram et Collins (1999); Miller et Bellan (1999); Ahmed et Elgobashi (2000)). Ces équations s'écrivent dans le cas d'un fluide incompressible comme suit :

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_L = 0 \quad (1-91)$$

$$\rho_L \frac{\partial \mathbf{u}_L}{\partial t} + \rho_L \mathbf{u}_L \cdot \nabla \mathbf{u}_L = -\nabla p_L + \mu \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}_L) + \mathbf{I}_L \quad (1-92)$$

où \mathbf{u}_L et p_L désignent la vitesse et la pression dans le liquide, ρ_L et μ_L désignent sa densité et sa viscosité dynamique. \mathbf{I}_L est un terme source sous forme de distribution de type Dirac introduisant la force par unité de volume exercée par les inclusions sur le liquide. Il est formulé comme suit :

$$\mathbf{I}_L(\mathbf{x}, t) = - \sum_{p=1}^N \int \mathbf{f}(\mathbf{x}_p, t) H(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (1-93)$$

Dans cette expression, $\mathbf{f}(\mathbf{x}_p, t)$ représente la force exercée sur l'inclusion P dont le centre est situé à l'instant t à la position \mathbf{x}_p , et H est un filtre spatial passe-bas tridimensionnel de largeur caractéristique la longueur des mailles.

Cette méthode constitue un outil assez performant pour l'étude des interactions des inclusions avec la turbulence de la phase continue (Février et Simonin (2001)). Cependant, elle reste limitée par la difficulté de sa mise en œuvre dès que la configuration d'écoulement envisagée devient complexe ou le nombre des bulles augmente. Un autre inconvénient de cette méthode concerne l'expression de la force exercée par le liquide sur une bulle qui n'est pas établie sous une forme analytique dans le cas général. Cette difficulté a été contournée dans certains travaux récents en calculant à partir de l'écoulement de la phase continue simulé le tenseur des contraintes exercé à la surface de l'inclusion (Fadlun et al. (2000); Hu et al. (2001); Burton et Eaton (2002)).

1.5.2 Approche par simulation des grandes échelles

Dans cette approche, les équations instantanées de Navier Stokes sont filtrées spatialement afin d'obtenir des équations de transport permettant de calculer les grandes échelles de la turbulence de la phase continue. Tandis que les micro-échelles à caractère universel sont modélisées par un modèle dit de sous-maille. Les trajectoires des inclusions sont calculées de la même manière que dans le cas de la méthode de simulation directe.

Par comparaison à la DNS, la LES induit une perte d'information au niveau de la modélisation des micro-structures de la turbulence, cependant elle conserve un niveau de description assez satisfaisant tout en permettant de dépasser la limite des faibles nombres de Reynolds rencontrées dans la DNS. Cette méthode a permis en particulier d'analyser le phénomène de dispersion des inclusions dans une turbulence homogène et isotrope (Février et Simonin, 2001) et constitue un outil important pour tester la validité des relations de fermeture plus ou moins empiriques adoptées dans les modèles à deux fluides. Nous pouvons citer à titre d'exemples le développement d'approches numériques par la technique de LES a permis des progrès significatifs en précisant certains aspects des interactions interfaciales en écoulements à bulles (Rivero et al (1991) ; Magnaudet et al (1995) ; Sangani et Didwania (1992), Merle et al (2004)). Cependant la prise en compte de l'effet des bulles dans les modèles de sous-maille reste encore assez approximative.

1.6 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation de la démarche de la modélisation eulérienne des écoulements à bulles. La description eulérienne de ce type d'écoulements est possible à l'aide du formalisme des distributions. Le traitement statistique des équations instantanées écrites au sens des distributions élimine l'information sur la géométrie des interfaces et décrit le milieu diphasique comme un mélange de deux fluides qui coexistent et interagissent mutuellement. La capacité du modèle à deux fluides conçu selon cette démarche dépend de la précision avec laquelle les fermetures vont restituer la perte d'information relative à la prise de moyenne des équations instantanées.

Nous avons vu que le problème de fermeture concerne essentiellement les termes interfaciaux de transfert de quantité de mouvement et du tenseur de Reynolds dans la phase liquide. La fermeture des termes interfaciaux se heurte à deux difficultés principales : la première concerne la formulation de la force qui s'exerce sur une inclusion isolée. La deuxième difficulté est associée au passage de l'expression de la force de nature lagrangienne à une formulation eulérienne locale de l'échange interfacial. Nous avons également souligné que la fermeture des termes interfaciaux fait apparaître le terme turbulent de double corrélation des fluctuations des vitesses dans le liquide. Ce résultat montre la grande importance de la précision de la fermeture de la turbulence dans le liquide. Nous nous proposons de développer la modélisation de la turbulence dans le liquide dans le chapitre suivant.

Chapitre 2 : Modèles de turbulence en écoulement à bulles

2.1 Introduction

Les fermetures de la turbulence dans les écoulements à bulles se sont largement inspirées de l'expérience acquise dans l'étude des écoulements turbulents monophasiques. D'une façon générale, les méthodes de fermeture en un point de la turbulence donnent lieu à toute une classe de modèles qui sont largement utilisés dans la prédétermination des écoulements turbulents. Issus de la hiérarchie des équations des moments en un point, ces modèles sont d'autant plus performants que leur ordre est élevé ; en revanche les modèles à degrés élevés sont les plus complexes.

Comme en monophasique, le recours à l'expérience pour l'ajustement des modèles de turbulence est déterminant et on dispose actuellement d'un ensemble significatif de résultats expérimentaux sur la structure d'écoulements à bulles de base. L'exploitation de ces expériences intervient à deux niveaux dans l'élaboration des modèles de turbulence :

- D'abord au niveau de la formulation des fermetures : l'analyse physique des expériences permet la compréhension des phénomènes qui est souvent à la base des schémas conceptuels de modélisation.
- Ensuite dans l'ajustement des modèles : les expériences sont utilisées pour évaluer et ajuster les modélisations

Les résultats obtenus dans les expériences menées sur les écoulements diphasiques dispersés montrent que la répartition des phases est fortement corrélée aux champs fluctuants dans ces écoulements : On sait depuis plus de deux décennies que la turbulence dans le liquide joue un grand rôle dans la distribution des phases dans les écoulements à bulles (Drew et Lahey 1982) et des expériences récentes montrent l'important effet des contributions turbulentes des termes

interfaciaux de transfert de quantité de mouvement dans la distribution des phases (Kamp et al 1995 ; Chahed et al 2003). On sait d'autre part que la présence de la phase dispersée, même à des faibles taux de présence, modifie considérablement la structure de la turbulence du liquide de différentes manières. En écoulements diphasiques à faibles intensités turbulentes (Ex.: écoulements faiblement cisailés), la présence des bulles induit une augmentation significative de la turbulence par comparaison au cas monophasique équivalent (Lance et Bataille 1991 ; Mareuge et Lance 1995). Cependant, en écoulements turbulents caractérisés par des fortes intensités turbulentes (Ex.: écoulements fortement cisailés), l'effet de la présence des bulles est plus complexe. Les observations expérimentales obtenues en conduite verticale par exemple (Liu et Bankof 1990 ; Wang et al 1987) montrent une augmentation des fluctuations turbulentes dans les zones à faible cisaillement (au voisinage de l'axe de la conduite), alors que dans les zones proches des parois, où la production par cisaillement de la turbulence est importante, l'effet des bulles est moins simple à interpréter. On peut même observer, sous certaines conditions, une atténuation de l'intensité turbulente par comparaison à l'écoulement monophasique équivalent (Serizawa et al 1992). Plus précisément, les résultats expérimentaux obtenus dans le cas de la turbulence à bulles homogène soumise à un cisaillement constant (Lance et al 1991) montrent que le mécanisme de redistribution de la turbulence associé à la corrélation des fluctuations de pression et de déformation est fortement altéré par la présence des bulles. L'ensemble de ces résultats indique que le développement de modèles à deux fluides nécessite une modélisation adéquate de la turbulence tenant compte d'une manière intrinsèque des interactions interfaciales. Des modèles au premier et au second ordre de la turbulence dans les écoulements à bulles ont été développés au cours des deux dernières décades. La question essentielle à laquelle on tente d'apporter des réponses en terme de modélisation concerne la prise en compte des effets interfaciaux sur la structure de la turbulence du liquide. A cet effet, des échelles supplémentaires sont introduites dans les modèles.

Les développements proposés ont permis des progrès significatifs dans l'amélioration des modélisations de la turbulence dans les écoulements à bulles. Cependant, on ne trouve pas dans la littérature spécialisée d'analyse de classification ni d'évaluation systématique des modélisations. Pourtant l'examen des modèles proposés indique qu'une classification est possible en considérant le niveau de fermeture et le nombre d'échelles mises en jeu. L'analyse avec classification des modèles de turbulence en écoulement à bulles va s'avérer très utile dans la mesure où elles met en évidence l'évolution des méthodes de modélisation qui, en quelque sorte, a accompagné l'évolution de la

compréhension qu'on a aujourd'hui des effets interfaciaux sur la structure de la turbulence en écoulement à bulles.

Nous nous proposons dans ce chapitre d'analyser les modèles de turbulence développés pour les écoulements à bulles en essayant à chaque fois d'évaluer les fermetures vis-à-vis des données expérimentales de la turbulence homogène à bulles en écoulement uniforme, (Lance et Bataille 1991) et de cisaillement pur, (Lance et al 1991). Ces expériences marquantes ont permis de préciser certains aspects essentiels des interactions interfaciales et de leurs effets sur la structure de la turbulence dans des situations d'écoulements simples où il est possible d'interpréter et d'évaluer les fermetures proposées.

2.2 Expériences de turbulence homogène en écoulement à bulles

Nous avons évoqué au chapitre 1, que l'écoulement de turbulence homogène avec et sans cisaillement sont des situations qui permettent un découplage entre les mouvements moyen et fluctuant dans le liquide et quelles permettent à ce titre d'interpréter la modification de la structure de la turbulence en écoulements à bulles par les seuls effets interfaciaux.

En l'absence de gradients des grandeurs fluctuantes, la diffusion est négligée et les seuls mécanismes qui subsistent sont :

- La dissipation par les effets visqueux.
- Le transfert spectral de l'énergie induit par les interactions tourbillonnaires.
- La production par les gradients moyens (uniforme en écoulement uniformément cisailé et nulle en écoulement uniforme)
- La production interfaciale uniforme dans tout le domaine (taux de vide constant).

Nous nous proposons d'analyser dans un premier temps la turbulence homogène uniforme et on examinera ensuite l'écoulement uniformément cisailé. La comparaison des données en écoulements à bulles avec les données de l'écoulement monophasique nous permet de préciser les mécanismes interfaciaux et leurs effets sur la structure de la turbulence.

2.2.1 Turbulence homogène uniforme

2.2.1.1 Turbulence homogène uniforme en écoulement monophasique

L'écoulement turbulent homogène a fait l'objet de plusieurs travaux théoriques (Kolmogorov 1941) et expérimentaux (Kistler et al 1954, Mills et al 1958, Comte-bellot et Corsin 1966, Ling et Huang 1970). Il peut être produit en réalisant un écoulement rectiligne et uniforme à travers une grille plane placée transversalement. La grille constitue ainsi un générateur local de la turbulence dont les échelles sont fixées par la taille et le type des mailles qui constituent la grille. Une fois produite et en l'absence de forçages relatifs aux gradients moyens, la turbulence s'atténue et devient sensiblement isotrope à partir d'une certaine distance à la grille.

En l'absence de production, l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente s'écrit :

$$\frac{dk}{dt} = -\epsilon_0 \quad (2-1)$$

Le transfert spectral de l'énergie turbulente associé à cette évolution peut être décrit par l'équation suivante (Chassaing 2000) :

$$\frac{dE}{dt} = T - 2\nu k^2 E \quad (2-2)$$

où E est la densité spectrale de l'énergie turbulente et T représente le terme de transfert inter-tourbillonnaire.

Dans la zone proche de la grille où les forces d'inertie liées aux fluctuations turbulentes sont importantes le mécanisme de transfert est dominant de sorte que l'on puisse considérer que les tourbillons dissipatifs sont dissociés des structures turbulentes énergétiques. En revanche, assez loin en aval de la grille (pour $x/M > 250$, x étant la position longitudinale et M la taille de la maille de la grille), les fluctuations turbulentes sont réduites à un point tel que les forces d'inertie deviennent négligeables devant les forces de viscosité, Batchelor et Townsend (1948). On aboutit ainsi à une situation asymptotique où le transfert spectral est dominé par le mécanisme de la dissipation visqueuse.

Schématiquement nous distinguons deux plages de nombres d'onde correspondant respectivement aux structures turbulentes énergétiques caractérisées par une échelle de temps τ_E et aux structures turbulentes dissipatives caractérisées par une échelle de temps τ_ϵ , très faible devant τ_E . Il en résulte que les structures dissipatives s'adaptent rapidement aux variations des structures énergétiques. Cet état d'équilibre est qualifié par Kolmogorov (1948) d'universel du fait de son indépendance des caractéristiques macroscopiques de l'écoulement. Dans le cas de la turbulence homogène pleinement développée, cette zone d'équilibre universel s'élargit suffisamment pour faire apparaître une zone dite "sous-domaine inertiel" sur laquelle le mécanisme de transfert est prépondérant par comparaison à la dissipation. Il en résulte que le taux de dissipation correspond dans cette zone au flux conservatif de la cascade d'énergie vers les petites structures turbulentes et que la densité spectrale E est indépendante de la viscosité cinématique ν . Une analyse dimensionnelle permet alors d'établir la relation suivante dite loi en puissance $-\frac{5}{3}$.

$$E \approx \epsilon_0^{\frac{2}{3}} \kappa^{-\frac{5}{3}} \quad (2-4)$$

Ce résultat théorique confirmé par différents travaux expérimentaux, met en évidence un caractère universel de la turbulence monophasique. Il indique qu'il existe une plage de nombre d'ondes où la décroissance spectrale en puissance $-\frac{5}{3}$ comme le montre la figure (2-1).

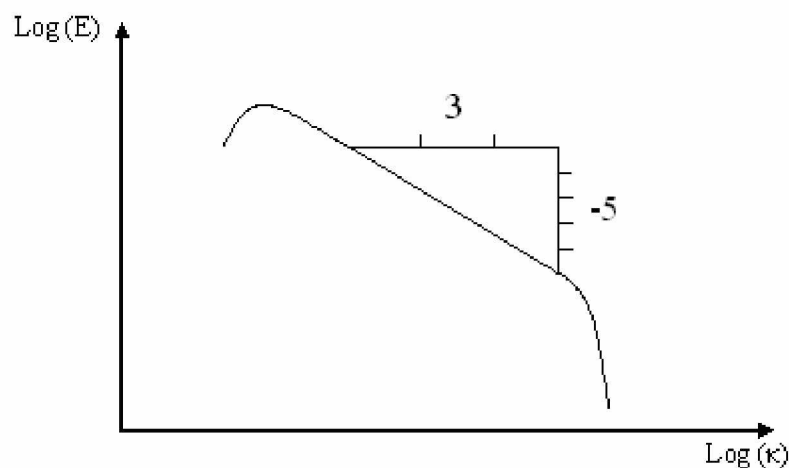


Figure (2-1) : densité spectrale en turbulence monophasique

Les expériences de Lance et Bataille (1991) de la turbulence homogène diphasique montrent que la structure du spectre est fondamentalement modifiée par la présence des bulles. Leur analyse conduit à un certain nombre de conclusions essentielles pour comprendre les mécanismes fondamentaux par lesquels la turbulence est altérée par la présence des bulles.

2.2.1.2 Turbulence homogène uniforme en écoulement à bulles

Les expériences de Lance et Bataille (1991) sont réalisées avec des faibles taux de vide ne dépassant pas 3 % et des bulles de diamètre de l'ordre de 5 mm. Ces expériences, décrites en détail dans Lance et Bataille (1991), produisent, en monophasique, des résultats similaires à ceux obtenus par Comte-Bellot et Corsin (1966) : on retrouve le caractère isotrope de la turbulence et la même décroissance de l'énergie turbulente à l'aval de la grille.

Les résultats obtenus dans le cas diphasique montrent une modification considérable du spectre de l'énergie turbulente en écoulement à bulles (Figure (2-2)) : en particulier la décroissance spectrale en puissance $-\frac{5}{3}$ est remplacée par une décroissance en puissance $-\frac{8}{3}$; résultat d'ailleurs confirmé par les expériences de Wang et al (1987) de l'écoulement à bulles en conduite.

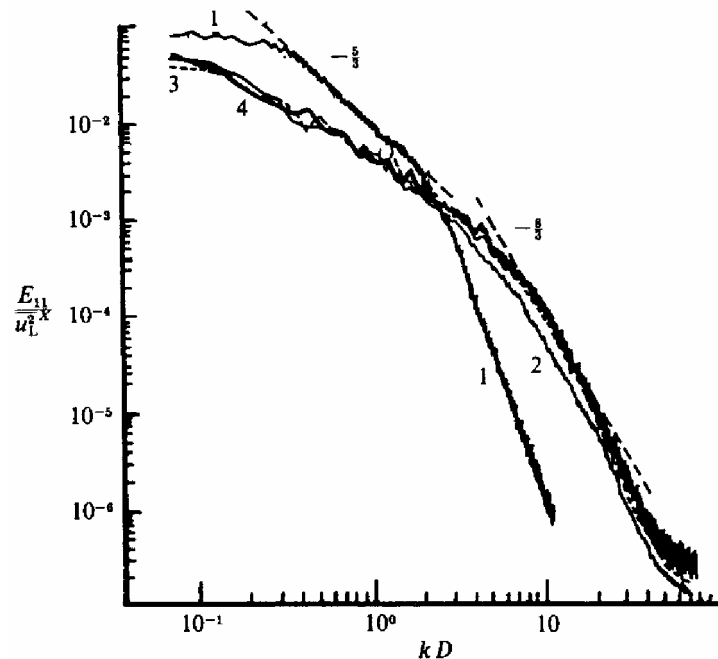


Figure (2-2) : spectre monodimensionnel de l'énergie turbulente longitudinale. Lance et Bataille (1991)

Lance et Bataille (1991) proposent une interprétation simple mais pertinente des mécanismes à l'origine de la modification du comportement spectral de la turbulence en écoulement à bulles. Ils écrivent les équations régissant les phénomènes de transport de l'énergie turbulente et de son transfert spectral en écoulement à bulles sous la forme :

$$\frac{dk}{dt} = P_1 - \varepsilon \quad (2-5)$$

$$\frac{dE}{dt} = \Pi - T - 2\nu \kappa^2 E \quad (2-6)$$

Par comparaison aux équations monophasiques (2-1) et (2-2), l'équation (2-5) fait apparaître un terme supplémentaire associé à la production interfaciale de l'énergie turbulente. Dans l'équation (2-6) apparaît également un terme de production de la turbulence au niveau des sillages de bulles.

Cette équation permet d'interpréter la modification du comportement spectral de la turbulence en écoulement à bulles ; elle indique qu'il existe, aux grands nombres d'onde, une forme de compétition entre trois mécanismes : production de turbulence dans les sillages, transfert spectral et dissipation visqueuse caractérisés respectivement par les échelles de temps τ_{sl} , τ_E , τ_ε . En s'appuyant sur les données expérimentales, l'analyse des ordres de grandeur montre que les échelles de production-dissipation sont très faibles en comparaison avec l'échelle caractéristique du transfert spectral ; cette comparaison permet d'écrire :

$$\tau_\varepsilon \leq \tau_{sl} \ll \tau_E \quad (2-7)$$

Ce résultat important indique que les fluctuations turbulentes produites dans les sillages sont immédiatement dissipées avant même que leur transfert spectral ne puisse avoir lieu. Dans ces conditions, l'équation (2-6) se réduit à l'équilibre suivant :

$$0 \approx \Pi - 2\nu \kappa^2 E \quad (2-8)$$

L'analyse dimensionnelle permet d'exprimer Π en fonction des nombres d'onde κ et du taux de dissipation ε_w dans les sillages sous la forme :

$$\Pi \approx \frac{\varepsilon_w}{\kappa} \quad (2-9)$$

Avec ce résultat, l'équation (2-8) permet de déduire la relation suivante :

$$E \approx \kappa^{-3} \quad (2-10)$$

qui exprime une décroissance en puissance -3 voisine de la valeur expérimentale de $-\frac{8}{3}$. Ce résultat confirme, du moins pour les écoulements à bulles à faibles taux de vide, l'hypothèse de l'équilibre production-dissipation dans les sillages.

Les expériences de Lance et Bataille (1991) indiquent d'autre part que la turbulence en écoulement homogène à bulles s'exprime comme la somme d'une turbulence induite par les bulles (uniforme dans tout le domaine) et d'une turbulence associée à la cascade énergétique, figure (2-3). Dans ces conditions, l'équilibre production-dissipation dans les sillages des bulles implique que la décroissance de l'énergie cinétique à l'aval de la grille se produit avec un temps caractéristique comparable à celui de l'écoulement monophasique.

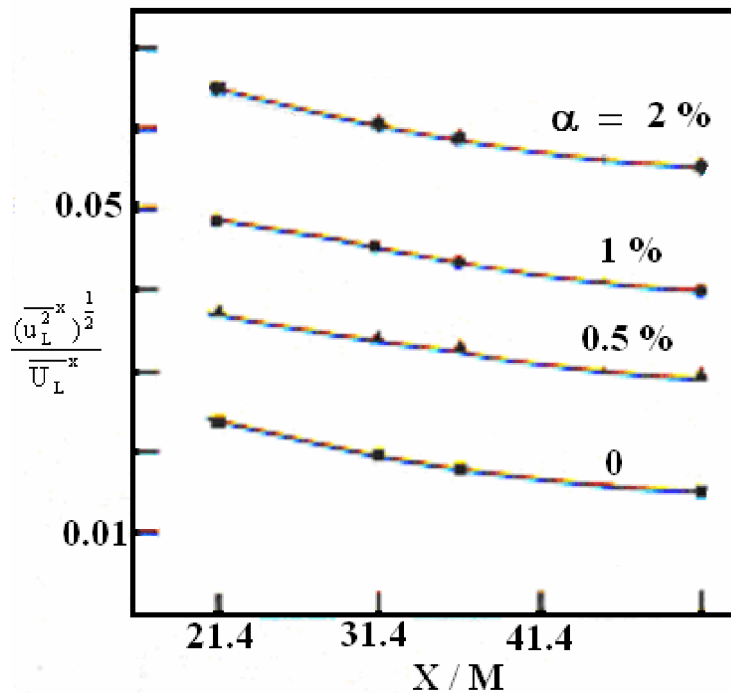


Figure (2-3) : Décroissance de l'intensité turbulente $\sqrt{u'^2}/U$ derrière une grille, $M = 4\text{cm}$: la maille de la grille (Lance et Bataille, 1990)

2.2.2 Expérience de turbulence homogène avec cisaillement uniforme

2.2.2.1 Turbulence homogène avec cisaillement uniforme en écoulement monophasique

Plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude de la turbulence homogène monophasique soumise à un cisaillement constant. Nous citons à titre d'exemples les travaux expérimentaux de Rose (1966, 1970), de Champagne et al (1970) ou de Mulhern et Luxton (1975) ainsi que les travaux numériques de Rogallo (1981) dans lesquels cet écoulement a été traité par simulation numérique directe. L'ensemble des résultats obtenus montre que l'évolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds le long de l'écoulement fait apparaître deux phases : une première phase transitoire caractérisée par une décroissance des composantes normales du tenseur de Reynolds et une augmentation du frottement turbulent, suivie par une seconde phase caractérisée par un équilibre asymptotique où les composantes du tenseur de Reynolds se stabilisent à un niveau qui demeure sensiblement constant. Cet équilibre, qui correspond à un régime anisotrope, ne peut être entretenu que par la présence de mécanisme d'apport d'énergie turbulente par l'écoulement moyen afin de compenser la dissipation visqueuse.

L'écoulement de turbulence homogène avec cisaillement uniforme constitue une étape essentielle dans l'analyse des mécanismes de la turbulence. Le fait que le champ fluctuant soit homogène nous autorise à négliger les phénomènes de diffusion et de focaliser l'analyse sur l'équilibre production-redistribution-dissipation. C'est d'autant plus utile en écoulement diphasique, que cette situation d'écoulement permet d'écarter le problème de la distribution des phases (considérée uniforme).

La turbulence homogène avec cisaillement uniforme en écoulement à bulles a été étudiée par Lance et al (1991) avec des taux de vide modérés : les résultats expérimentaux obtenus ont permis de préciser les effets des interfaces sur les mécanismes de la turbulence notamment en ce qui concerne les effets de redistribution. La figure (2-4) montre l'évolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ et $\overline{u'v'}$ en écoulement monophasique. On retrouve bien les deux

phases de décroissance et d'équilibre de l'énergie, observées dans des expériences antérieures (Rose (1966, 1970) ; Champagne et al. (1970, 1977)).

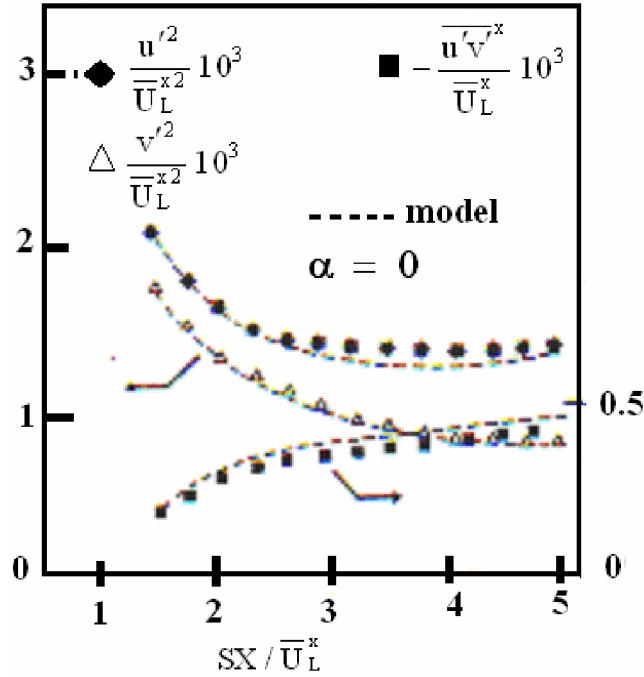


Figure (2-4) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds en écoulement monophasique homogène à cisaillement constant, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$ (D'après Lance et al, 1991)

Dans le tableau (2-1) on compare les valeurs des composantes b_{11} , b_{22} et b_{12} du tenseur d'anisotropie (équation (2-11)) de l'écoulement monophasique de Lance et al (1991) calculées en situation d'équilibre, aux données expérimentales de Champagne et al (1970-1977) et Rose (1966, 1970).

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (2-11)$$

Tableau (2-1) : Comparaison des composantes du tenseur d'anisotropie à l'équilibre dans l'expérience monophasique de Lance et al. (1991) avec les valeurs obtenues par d'autres auteurs

	Taux de cisaillement S (s^{-1})	b_{11}	b_{22}	b_{12}
Lance et al. (1991)	2.9	0.31	-0.16	-0.30
Rose (1966, 1970)	8.3	0.162	-0.11	-0.30
Champagne et al. (1970)	12.9	0.27	-0.18	-0.33
Champagne et al. (1977)	43.4	0.37	-0.26	-0.30

Ces résultats indiquent que l'écart entre les composantes normales b_{11} et b_{22} du tenseur d'anisotropie dans le cas monophasique dépend du taux de cisaillement. Plus précisément, les résultats de Rose (1966, 1970) et de Champagne et al. (1970, 1977) montrent que cet écart augmente avec le taux de cisaillement (Chassaing 2000). En revanche un résultat essentiel des expériences de cisaillement uniforme est de montrer que le frottement turbulent normé par l'énergie cinétique turbulente demeure quasiment constant voisin de 0.3.

2.2.2.2 Turbulence homogène avec cisaillement uniforme en écoulement à bulles

Dans les expériences diphasiques de turbulence homogène avec cisaillement uniforme, Lance et al (1991), les bulles sont injectées d'une manière uniforme à l'entrée de l'écoulement de telle sorte qu'on réalise une répartition uniforme du taux de vide dans tout le domaine de l'écoulement. Cette injection ne modifie pas le profil de la vitesse moyenne du liquide (figures (2-5) et (2-6)). Le fait d'avoir le même cisaillement dans les expériences monophasique et diphasiques est essentiel ; cela permet une interprétation aisée des mesures des composantes fluctuantes en écoulement diphasique : avec le même taux de cisaillement, la variation du frottement turbulent (équivalente à une variation de viscosité turbulente) peut par exemple s'interpréter vis-à-vis des effets des interactions interfaciales sur les mécanismes de la turbulence.

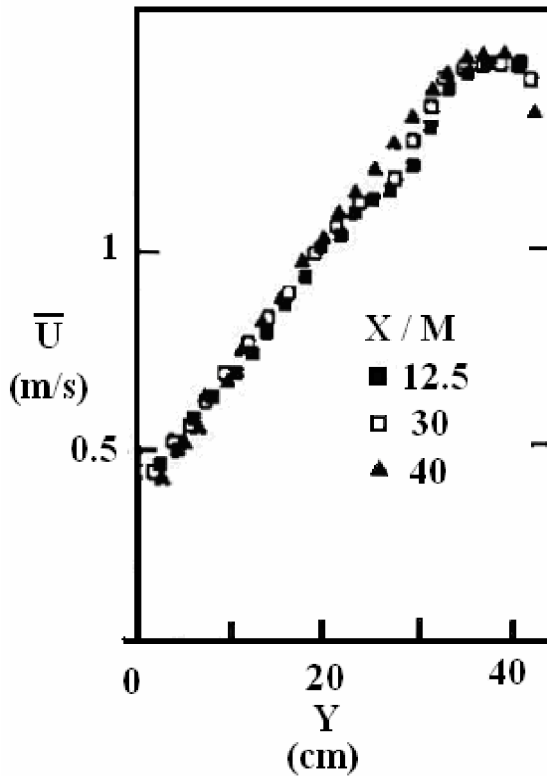


Figure (2-5) : Profil de la vitesse moyenne dans le cas monophasique à différentes sections (D'après lance et al. (1991))

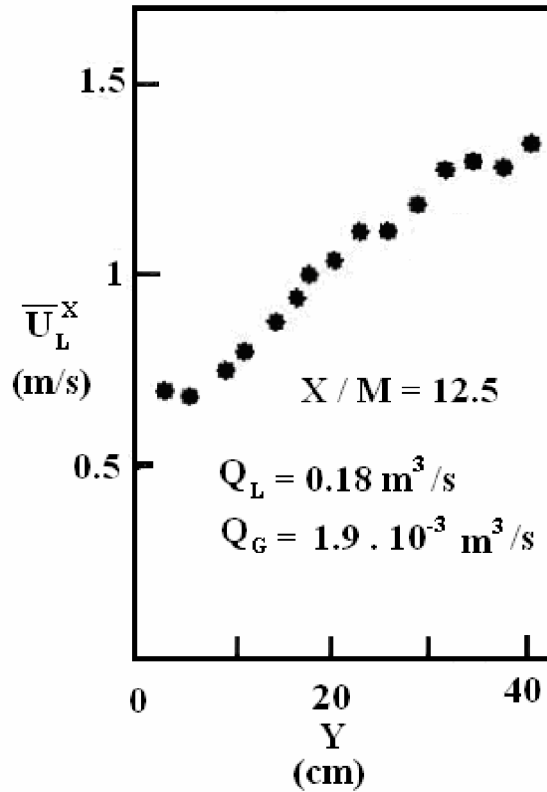


Figure (2-6) : Profil de la vitesse moyenne dans un cas diphasique à une section (D'après lance et al. (1991))

Les figures (2-7)-(2-9) montrent l'évolution des composantes du tenseur de Reynolds normées par la vitesse moyenne du liquide au centre de la section pour les taux de vide de 1 %, 1.4 % et 2 % avec un taux de cisaillement de 2.9 s^{-1} . La figure (2-10) montre les mêmes grandeurs avec un taux de vide de 1 % et un cisaillement de 2.4 s^{-1} . Ces figures indiquent une tendance à l'isotropie en écoulements à bulles plus prononcée qu'en écoulement monophasique. Cette isotropisation de l'écoulement, qui augmente en fonction du taux de vide, se traduit par une augmentation importante de la composante $\overline{v'^2}$ ainsi qu'une réduction du frottement turbulent. Pour mettre en évidence ces effets, on présente dans le tableau (2-2) les valeurs des composantes du tenseur d'anisotropie à l'état d'équilibre en écoulement monophasique et en écoulements diphasiques.

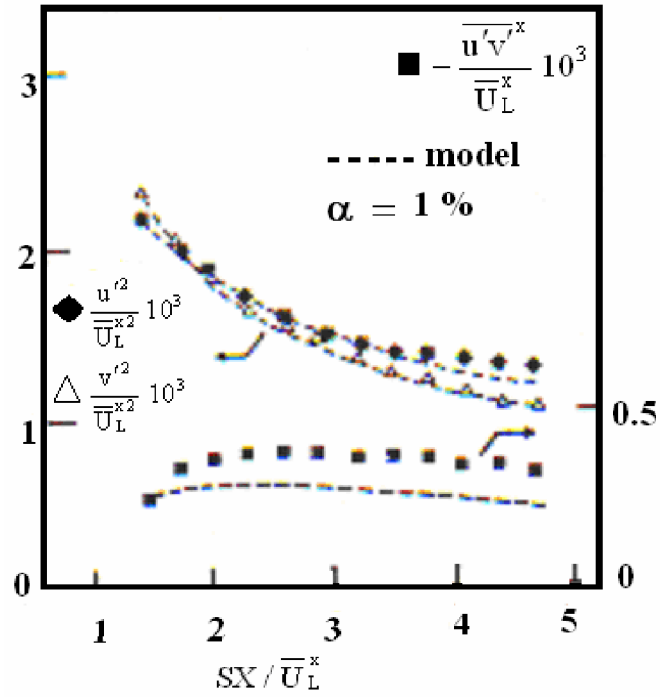


Figure (2-7) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds en écoulement diphasique homogène à cisaillement constant, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.01$ (D'après Lance et al., 1991)

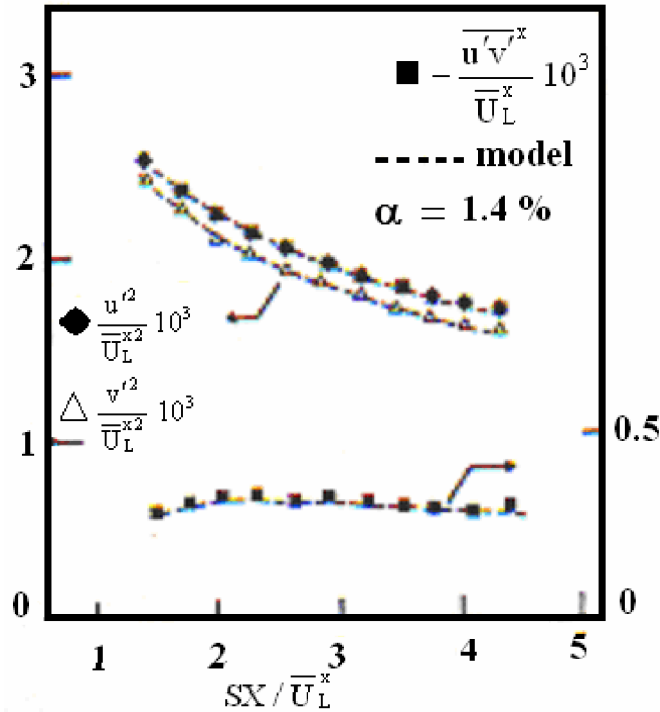


Figure (2-8) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds en écoulement diphasique homogène à cisaillement constant, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.014$ (D'après Lance et al., 1991)

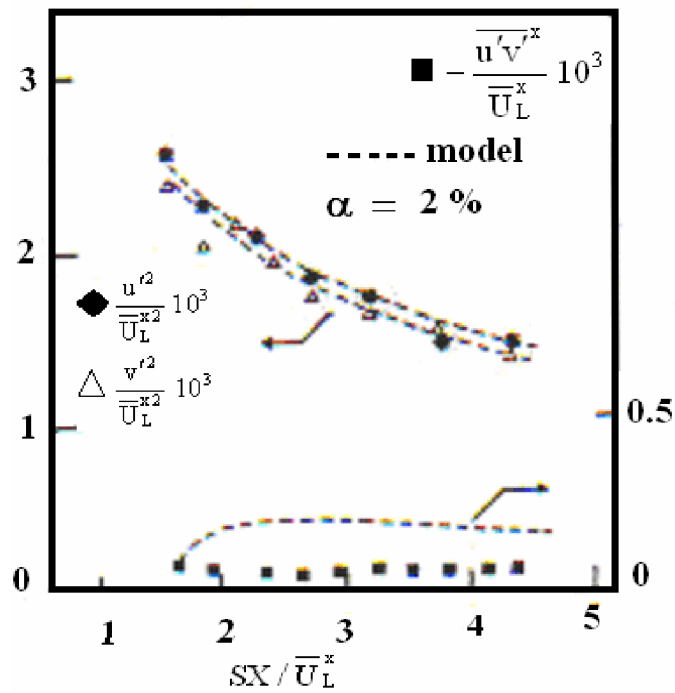


Figure (2-9) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds en écoulement diphasique homogène à cisaillement constant, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.02$ (D'après Lance et al., 1991)

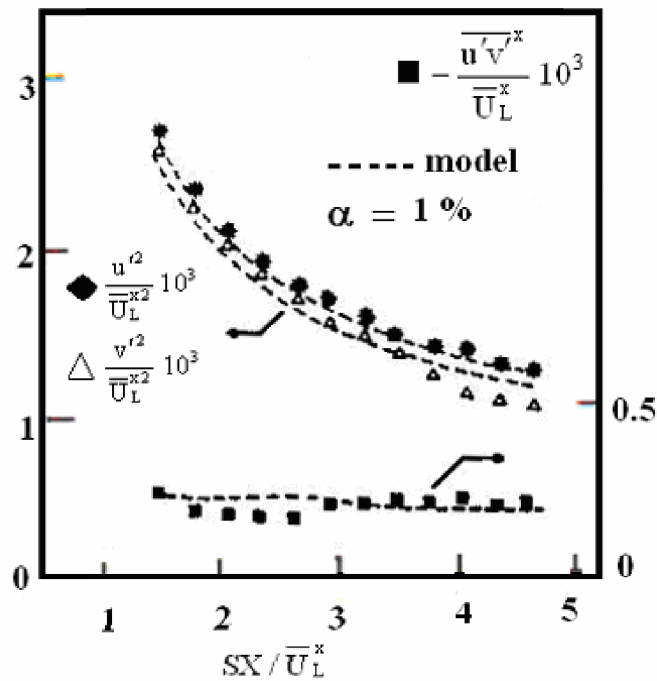


Figure (2-10) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds en écoulement diphasique homogène à cisaillement constant, $S = 2.4 \text{ s}^{-1}$, $\alpha = 0.01$ (D'après Lance et al., 1991)

Tableau (2-2) : Variation des composantes du tenseur d'anisotropie en fonction du taux de vide (expérience de Lance et al. (1991))

Taux de vide	Composantes du tenseur d'anisotropie	b_{11}	b_{22}	b_{12}
0 %		0.31	-0.16	-0.3
1 %		0.144	-0.071	-0.21
1.4 %		0.101	-0.054	-0.15
2 %		0.02	-0.01	-0.03

Pour interpréter ces résultats, revenons aux équations de transport des composantes du tenseur de Reynolds ; celles-ci s'écrivent dans le cas d'écoulement uniformément cisailé sous la forme suivante (voir paragraphe 1.3.4.1 ; Chapitre 1) :

$$\frac{d\overline{u'^2}}{dt} = -2\overline{u'v'}S + \frac{2}{\rho}\overline{p'\frac{\partial u'}{\partial x}} - \epsilon_{11} + P_{11} \quad (2-12)$$

$$\frac{d\overline{v'^2}}{dt} = \frac{2}{\rho}\overline{p'\frac{\partial v'}{\partial y}} - \epsilon_{22} + P_{22} \quad (2-13)$$

$$\frac{d\overline{u'v'}}{dt} = -\overline{v'^2}S + \frac{1}{\rho}\overline{p'(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x})} - \epsilon_{12} + P_{12} \quad (2-14)$$

L'équation de transport de l'énergie turbulente s'écrit sous la forme :

$$\frac{dk}{dt} = -\overline{u'v'}S - \frac{\epsilon_{ii}}{2} + \frac{P_{ii}}{2} \quad (2-15)$$

Le tenseur P_{ij} représente la production interfaciale de la turbulence, et ϵ_{ij} le taux de dissipation associé à la dissipation isotrope au niveau des micro-structures de la turbulence dans la phase continue, mais également à la dissipation dans les sillages des bulles. Avec l'hypothèse d'équilibre production-dissipation dans les sillages, la dissipation se réduit à la dissipation isotrope résultant de

la cascade énergétique et les équations de transport des composantes du tenseur de Reynolds (2-12)-(2-14) se réduisent à l'équilibre au système suivant :

$$0 = -2\overline{u'v'}S + \frac{2}{\rho}\overline{p'}\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{2}{3}\epsilon_0 \quad (2-16)$$

$$0 = \frac{2}{\rho}\overline{p'}\frac{\partial v'}{\partial y} - \frac{2}{3}\epsilon_0 \quad (2-17)$$

$$0 = -\overline{v'^2}S + \frac{1}{\rho}\overline{p'}\left(\frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}\right) \quad (2-18)$$

Le bilan de l'énergie cinétique turbulente s'écrit :

$$0 = -\overline{u'v'}S - \epsilon_0 \quad (2-19)$$

Comme en monophasique, le système d'équations (2-16)-(2-19) met en évidence les mécanismes qui contrôlent la structure de la turbulence homogène avec cisaillement uniforme : il y a d'une part le forçage par le cisaillement du champ moyen, il y a d'autre part l'étirement tourbillonnaire exprimé par les termes de corrélation pression-déformation. Plus précisément, l'équation (2-16) montre un équilibre entre la production par cisaillement de la composante longitudinale du tenseur de Reynolds, la redistribution par les corrélations pression-déformation des fluctuations turbulentes sur les autres composantes normales et la dissipation visqueuse. L'équation (2-17) indique, qu'en absence de production par les gradients moyens, l'alimentation de la composante transversale du tenseur de Reynolds est assurée par les corrélations pression-déformation ; l'équation indique dans ce cas un équilibre redistribution-dissipation. L'équation (2-18), relative au transport du frottement turbulent indique un équilibre production-redistribution ; la dissipation supposée isotrope n'apparaît pas dans ce bilan.

L'expérience montre que la structure de la turbulence est considérablement modifiée par la présence de la phase dispersée ; on note une augmentation de l'isotropie et une diminution du frottement turbulent. L'isotropisation de l'écoulement se manifeste par une augmentation de la composante transversale $\overline{v'^2}$; cette augmentation ne peut s'interpréter que par l'effet des bulles sur les termes de corrélation pression-déformation. Il semble que le passage aléatoire des bulles induit un

étirement tourbillonnaire supplémentaire qui expliquerait l'amplification des mécanismes de redistribution.

2.3 Modèles de turbulence en écoulements à bulles: Analyse et essai de classification

On se propose d'examiner dans la suite les différents modèles de turbulence proposés pour les écoulements à bulles en vue de proposer une forme de classification des fermetures; classification qui s'appuie essentiellement sur l'ordre de fermeture et sur le nombre des échelles qu'elles mettent en jeu. Dans cette étude nous commençons d'abord par les modèles qui ne procèdent pas au découplage entre les fluctuations produites par cisaillement et celles induites par les bulles. Dans cette classe de modèles qu'on appellera dans la suite modèles "à une échelle de temps", les modèles sont développés au premier et au second ordre ; ils n'introduisent pas explicitement des échelles propres à la turbulence induite par les bulles. La seconde classe de modèles appelée "modèles à deux échelles de temps" représente les fermetures où l'on introduit des échelles propres au mouvement des bulles pour représenter les effets interfaciaux sur la turbulence du liquide. Ces effets interfaciaux sont, selon les modèles, introduits dans les fermetures au premier et au second ordre.

2.3.1 Modèles de turbulence à une échelle de temps

2.3.1.1 Fermetures au premier ordre

Les fermetures au premier ordre expriment le tenseur de Reynolds à l'aide du concept de viscosité turbulente en utilisant la fermeture Boussinesq. Cette fermeture suppose que le tenseur de Reynolds varie linéairement en fonction du tenseur du taux de déformation. On admet ainsi que le frottement turbulent s'exprime de manière analogue au frottement visqueux en définissant une "viscosité turbulente" qui dépend des propriétés de l'écoulement :

$$\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} = -2\nu_t \mathbf{S} + \frac{2}{3} k_L \mathbf{I} \quad (2-20)$$

où $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\nabla \overline{\mathbf{u}}_L + (\nabla \overline{\mathbf{u}}_L)^T)$ est le tenseur du taux de déformation.

Plusieurs modèles de turbulence à deux équations à une échelle de temps (modèles k- ϵ essentiellement) ont été proposés pour les écoulements à bulles (Ex : Lee et al (1989), Simonin (1991), Wang et al (1994), Morel (1997)). Dans ces modèles, l'ensemble des fluctuations turbulentes y compris celles induites par les bulles est représenté par une seule échelle et les effets interfaciaux sur la structure de la turbulence sont modélisés par l'introduction de termes interfaciaux dans les équations de transport des grandeurs turbulentes. Les équations de transport de l'énergie turbulente $k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'_L \cdot \mathbf{u}'_L}$ et de son taux de dissipation ϵ s'écrivent ainsi sous la forme générale suivante :

$$\frac{D}{Dt}(\alpha_L k_L) = \nabla \cdot \left[\alpha_L \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla k_L \right] + \alpha_L (P_L - \epsilon) + S_k \quad (2-21)$$

$$\frac{D}{Dt}(\alpha_L \epsilon) = \nabla \cdot \left[\alpha_L \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \nabla \epsilon \right] + \alpha_L \frac{\epsilon}{k_L} (c_{\epsilon 1} P_L - c_{\epsilon 2} \epsilon) + S_\epsilon \quad (2-22)$$

Les équations (2-21) et (2-22) sont analogues aux équations de transport en écoulement monophasique à ceci près qu'elles sont pondérées par le taux de vide α et qu'elle contiennent des termes supplémentaires d'échange interfacial S_k et S_ϵ . Les termes du second membre représentent respectivement la diffusion, la production par le gradient de vitesse moyenne du liquide ($P_L = -\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} : (\nabla \overline{\mathbf{u}}_L) = 2\nu_t (\nabla \overline{\mathbf{u}}_L) : \mathbf{S}$) et le taux de dissipation ϵ .

Les modèles au premier ordre à une échelle de temps ont été mis en œuvre pour prédéterminer la structure de la turbulence dans différentes situations expérimentales d'écoulements à bulles y compris celles où une atténuation de la turbulence a été observée (Ex : Wang et al 1987, Liu et Bankoff 1990). Ces modèles sont en effet en mesure de reproduire aussi bien l'augmentation que la diminution de l'intensité turbulente en écoulement à bulles. Cela dépendrait des poids respectifs des

termes source S_k et S_ϵ ; leurs effets sur le bilan global de l'énergie cinétique turbulence peut être représenté par le rapport $\frac{\|S_k\|}{\|S_\epsilon\|}$ où $\|\cdot\|$ est une norme appropriée.

Le problème se ramène alors à la modélisation des termes S_k et S_ϵ mais également à la l'ajustement des constantes du modèle de turbulence. Nous présentons dans la suite différentes fermetures adoptées dans des modèles au premier ordre à une échelle de temps.

Modèle de Lee et al. (1989)

Lee et al. (1989) expliquent l'augmentation de l'énergie turbulente due à la présence des bulles par la diminution de l'énergie potentielle du liquide qui accompagne l'ascension des bulles. Celle ci induit le déplacement d'un volume du liquide équivalent dans la direction des pressions croissantes, et se traduit par une diminution de l'énergie potentielle du liquide qui contribue à l'accroissement de l'énergie turbulente. Ils en déduisent une formulation pour le terme d'échange interfacial d'énergie turbulente S_k sous la forme simple :

$$S_k = -c_3 \alpha_G \nabla p_L \cdot (\mathbf{u}_G - \mathbf{u}_L) \quad (2-23)$$

où c_3 est une fonction du nombre de Reynolds du liquide ajustée à partir des expériences de l'écoulement à bulles en conduite :

$$c_3 = 0.03 + \frac{-0.344 \cdot 10^{-5} R_{eL} + 0.243}{1 + \exp(\frac{R_{eL} - 60000}{2000})} \quad \text{avec} \quad 30000 < R_{eL} < 72000 \quad (2-24)$$

Lee et al (1989) expriment le terme source S_ϵ proportionnellement à S_k sous la forme :

$$S_\epsilon = c_4 \frac{\epsilon}{k_L} S_k \quad (2-25)$$

où c_4 est une constante ; dans le cas de l'ascension des bulles dans un liquide au repos, la constante c_4 est égale à $c_{\epsilon 2}$ et vaut 1.92.

La formulation de la viscosité turbulente adoptée est celle du modèle monophasique :

$$v_t = c_\mu \frac{k_L^2}{\varepsilon} \quad (2-26)$$

cependant Lee et al. (1989) proposent pour c_μ la relation empirique suivante :

$$c_\mu = 0.8 + (0.09 - 0.8)\exp(-100\alpha_G) \quad (2-27)$$

Cette relation augmente la valeur de c_μ de sorte que les profils de vitesse dans les écoulements à bulles en conduite concordent avec les données expérimentales de Serizawa et al (1974).

La constante σ_k est également modifiée en l'exprimant en fonction du nombre de Reynolds du liquide selon la relation empirique :

$$\sigma_k = 0.037 + (0.21 \cdot 10^{-5})R_{eL} + \frac{0.2}{1 + \exp\left(\left[\frac{R_{eL} - 65000}{5000}\right]^2\right)} \quad (2-28)$$

avec $30000 < R_{eL} < 72000$

Ce modèle a été mis en œuvre pour simuler l'écoulement à bulles dans une conduite cylindrique. Les résultats numériques sont comparés aux données expérimentales de Serizawa et al (1974). Cette comparaison indique une concordance satisfaisante entre résultats numériques et données expérimentales.

Modèle de Wang et al (1994)

Wang et al (1994) modélisent les termes d'échange interfaciaux S_k et S_ε dans les équations de transport (2-6) et (2-9) respectivement par :

$$S_k = 2k_L \frac{A_d}{\rho_L} (C_T - 1) + \frac{A_d v_t}{\rho_L \alpha_L \alpha_G \sigma_I} (\overline{\mathbf{u}_G} - \overline{\mathbf{u}_L}) \cdot \nabla \alpha_G \quad (2-29)$$

$$S_\varepsilon = 2\varepsilon \frac{A_d}{\rho_L} (C_T - 1) \quad (2-30)$$

où σ_I est une constante, d'après les simulations de l'écoulement à bulles en conduite, sa valeur est fixée à 0.3. A_d est donné par la relation :

$$A_d = \frac{3}{4} \frac{\alpha_G \rho_L}{d_B} C_D \left| \overline{\mathbf{u}_G} - \overline{\mathbf{u}_L} \right| \quad (2-31)$$

où C_D est le coefficient de traînée formulé par Wallis (1969) selon :

$$C_D = \frac{24}{R_{eL}} (1 + 0.15 R_{eL}^{0.687}) \quad \text{pour } R_{eL} < 1000 \quad \text{et} \quad C_D = 0.44 \quad \text{pour } R_{eL} > 1000 \quad (2-32)$$

Le coefficient C_T est un coefficient de proportionnalité qui relie les fluctuations turbulentes de la phase dispersée à celles de la phase continue. Il est exprimé par :

$$C_T = \frac{3 + \beta}{1 + \beta + 2 \frac{\rho_G}{\rho_L}} \quad (2-33)$$

où β est exprimé par la relation :

$$\beta = \frac{12 A_d}{\pi d_B \mu_L} \left(\frac{l_L}{d_B} \right)^2 \frac{1}{R_{et}} \quad (2-34)$$

avec :

$$R_{et} = \frac{\sqrt{u_L'^2} l_L}{\nu_L} \quad \text{et} \quad l_L = c_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad (2-35)$$

Dans l'expression de S_k le second terme a peu d'effet par rapport au premier. En le négligeant, le terme interfacial de dissipation S_ε s'exprime proportionnellement à S_k avec un coefficient de proportionnalité égal à la fréquence caractéristique des structures turbulentes les plus énergétiques comme pour le modèle de Lee et al (1989) :

$$S_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} S_k \quad (2-36)$$

Le modèle de Wang et al (1994) a été mis en œuvre pour la simulation d'un écoulement à bulles (eau/air) dans une conduite cylindrique et dans un élargissement brusque axisymétrique. Il a été également mis en œuvre dans la simulation de la dispersion d'un scalaire passif dans une zone de mélange (Issa et Oliveira, 1996).

Modèle de Simonin (1991)

Simonin (1991) déduit une modélisation du terme interfacial S_k en calculant la puissance développée dans le mouvement fluctuant par l'ensemble des forces qui s'exercent sur les interfaces. Le terme S_k est donné par la relation suivante :

$$S_k = \alpha_G \rho_L F_D \overline{\mathbf{u}'_L \cdot \mathbf{u}'_R} + \alpha_G \rho_L F_D \overline{\mathbf{u}_d \cdot \mathbf{u}_R} \quad (2-37)$$

Le terme interfacial S_ε est exprimé selon le modèle (2-25) :

$$S_\varepsilon = C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k_L} S_k \quad \text{où } C_{\varepsilon 3} \text{ est une constante de l'ordre de l'unité} \quad (2-38)$$

L'opérateur $\langle \rangle_G$ correspond à la moyenne phasique par rapport à la phase dispersée, $\overline{\mathbf{u}_R}$ et $\overline{\mathbf{u}_d}$ représentent la vitesse relative et de drift données par les expressions suivantes :

$$\alpha_G \overline{\mathbf{u}_d} = \langle \chi_G \mathbf{u}'_L \rangle \quad (2-39)$$

$$\overline{\mathbf{u}_R} = (\overline{\mathbf{u}_G} - \overline{\mathbf{u}_L}) - \overline{\mathbf{u}_d} \quad (2-40)$$

Le coefficient F_D qui apparaît dans (2-37) correspond au coefficient de traînée donné par :

$$F_D = \frac{3}{4} \rho_L \frac{C_D}{d} \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right| \quad (2-41)$$

La relation (2-37) fait apparaître une corrélation entre les fluctuations de la vitesse dans la phase continue et de la vitesse relative exprimée d'après Simonin (1991) par :

$$\overline{\mathbf{u}'_L \cdot \mathbf{u}'_R} = q_{LG} - k_L \quad (2-42)$$

où q_{LG} représente l'énergie turbulente due à l'interaction des phases s'exprimant par :

$$\alpha_G q_{LG} = \langle \mathbf{u}'_L \cdot \mathbf{u}'_G \rangle_G \quad (2-43)$$

Ce terme est modélisé en se basant sur la théorie de dispersion de Tchen par le modèle suivant:

$$q_{LG} = 2k_L \left[\frac{b + \eta_r}{1 + \eta_r} \right] \quad (2-44)$$

où b est un coefficient défini par :

$$b = (1 + C_A) \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} + C_A \right]^{-1} \quad (2-45)$$

et η_r est un paramètre lié aux effets d'inertie qui agissent sur la particule :

$$\eta_r = \frac{\tau_{12}^t}{\tau_{12}^F} \quad (2-46)$$

τ_{12}^t représente le temps de passage d'une particule dans un tourbillon et τ_{12}^F est un temps caractéristique de l'entraînement des inclusions par le fluide environnant.

Ce modèle a été mis en œuvre dans plusieurs configurations d'écoulements tels que l'écoulement à bulles dans un élargissement brusque (Bel Fdhila et Simonin, 1992), zones de mélange à bulles (Roig, 1993).

Modèle de Morel (1997)

Morel (1997) interprète la production interfaciale de l'énergie cinétique turbulente comme la puissance développée par les forces de traînée et de la masse ajoutée dans le mouvement relatif des bulles. Il propose ainsi la formulation suivante pour le terme S_k :

$$S_k = -(\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_{MA}) \cdot (\overline{\mathbf{u}_G} - \overline{\mathbf{u}_L}) \quad (2-47)$$

Le terme S_ε est exprimé selon le modèle (2-25).

Ce modèle a été implanté dans le code industriel CATHARE (Bestion 1994) et a été mis en œuvre dans la simulation des écoulements diphasiques en conduites verticales correspondant aux expériences de Liu et Bankoff (1990) et de Grossetête (1995 a, b). Les résultats numériques obtenus concernant les grandeurs turbulentes montrent qu'à forts taux de vide avec transition vers les écoulements à poches, les résultats des modèles s'écartent de manière significative des données expérimentales de Grossetête (1995 a, b).

2.3.1.2 Fermetures au second ordre

Drew et Lahey (1982) ont montré que la distribution du taux de vide en écoulement à bulles en conduite est essentiellement contrôlée par la turbulence. Ils déduisent analytiquement la distribution radiale du taux de vide dans un écoulement à bulles en conduite circulaire, et montrent que cette répartition dépend de la structure de la turbulence donc de la répartition de l'énergie turbulente entre les composantes normales du tenseur de Reynolds. Ces résultats ont été à l'origine de nombreux travaux expérimentaux visant l'analyse de la structure de la turbulence en écoulement à bulles. Parallèlement des travaux de modélisation se sont intéressés au développement de modèles au second ordre de la turbulence en écoulements à bulles.

Modèle de Lopez de Bertodano et al (1990)

D'une manière analogue à la modélisation au premier ordre, les modèles au second ordre se sont largement inspirés de l'expérience acquise dans l'étude des écoulements monophasiques. L'équation modélisée de transport du tenseur de Reynolds s'écrit d'une manière symbolique sous la forme générale suivante :

$$\alpha_L \frac{D \overline{u'_i u'_j}}{Dt} = \alpha_L (P_{ij} + D_{ij} + \phi_{ij} - \epsilon_0) + S_{ij}^I \quad (2-48)$$

où P_{ij} est la production turbulente par cisaillement dans la phase liquide, D_{ij} et ϕ_{ij} représentent les termes de diffusion et de redistribution modélisés selon le modèle de Launder et al (1975) et S_{ij}^I est un tenseur associé à la production induite par les interactions interfaciales.

La dissipation est considérée isotrope conformément à l'hypothèse d'isotropie locale et est décrite dans les modèles au second ordre par l'équation générale suivante :

$$\frac{D}{Dt} (\alpha_L \epsilon) = D_\epsilon + \alpha_L \frac{\epsilon}{k_L} (c_{\epsilon 1} P_L - c_{\epsilon 2} \epsilon) + S_\epsilon \quad (2-49)$$

où D_ϵ est le terme de diffusion modélisé selon le modèle de Launder et al (1975) et P_L est donné par la relation la demi trace du terme P_{ij} . Les constantes qui figurent dans cette équation correspondent aux constantes ajustées dans le modèle de Launder et al (1975).

Lopez de Bertodano et al. (1990) expriment la production interfaciale de tensions de Reynolds par la puissance développée par la force de traînée dans le mouvement relatif :

$$S_{ij}^I = P^I T_{ij} \quad (2-50)$$

où P^I est donné par :

$$P^I = C_1 \left(\frac{3}{4} \frac{C_D}{d} \rho_L \alpha_L \right) \left\| \overline{\mathbf{u}_G} - \overline{\mathbf{u}_L} \right\|^3 \quad (2-51)$$

et T_{ij} est un tenseur introduisant le caractère anisotrope de la turbulence. Il est exprimé en se basant sur la solution théorique de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984) établie en écoulement potentiel à bulles sous la forme :

$$T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

Le coefficient empirique C_1 est fixé à la valeur 0.02 pour tenir compte du fait qu'une faible portion de l'énergie turbulente produite par les bulles est transférée vers les structures tourbillonnaires dans la phase continue.

Le terme interfacial dans l'équation de transport du taux de dissipation est modélisé par :

$$S_\varepsilon = c_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} P^I \quad \text{avec} \quad c_{\varepsilon 3} = 1.92 \quad (2-53)$$

Ce modèle a été appliqué dans le cas de l'écoulement à bulles en conduite et confronté aux expériences de Serizawa et al. (1974) et Wang et al. (1987).

2.3.1.3 Analyse des modèles à une échelle de temps

Lopez de Bertodano et al. (1994) montrent que dans le cas général, la modélisation à une échelle de temps (au premier ou au second ordre) est insuffisante pour décrire la turbulence en écoulement diphasique. En effet, les équations modélisées de transport de l'énergie turbulente et du taux de

dissipation (2-21) et (2-22) se réduisent dans le cas d'un écoulement turbulent homogène monophasique uniforme aux système suivant :

$$\frac{Dk_L}{Dt} = -\epsilon \quad (2-54)$$

$$\frac{D\epsilon}{Dt} = -c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon}{k_L} \epsilon \quad (2-55)$$

En écrivant l'équation (2-54) sous la forme :

$$\frac{D^2 k_L}{Dt^2} = -\frac{D\epsilon}{Dt} \quad (2-56)$$

l'équation (2-55) s'écrit :

$$\frac{D^2 k_L}{Dt^2} = c_{\epsilon 2} \frac{1}{k_L} \left(\frac{Dk_L}{Dt} \right)^2 \quad (2-57)$$

En considérant les conditions initiales à $t = 0s$: $k_L = k_{L0}$ et $\epsilon = \epsilon_0$, l'intégration de l'équation (2-57) permet d'établir en première étape l'équation :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{k_L}{k_{L0}} \right) = -\frac{\epsilon_0}{k_{L0}} \left(\frac{k_L}{k_{L0}} \right)^{c_{\epsilon 2}} \quad (2-58)$$

dont la résolution nous donne une expression analytique de l'évolution au cours du temps de l'énergie turbulente :

$$\frac{k_L}{k_{L0}} = \left[\frac{1}{1 + (c_{\epsilon 2} - 1) \frac{\epsilon_0}{k_{L0}} t} \right]^{\left(\frac{1}{c_{\epsilon 2} - 1} \right)} \quad (2-59)$$

Avec l'approximation $c_{\epsilon 2} = 1.92 \approx 2$, l'expression (2-59) peut s'écrire sous la forme simplifiée :

$$\frac{k_L}{k_{L0}} \approx \frac{1}{1 + \frac{t}{\left(\frac{k_{L0}}{\epsilon_0} \right)}} \approx \exp\left(-\frac{t}{\left(\frac{k_{L0}}{\epsilon_0} \right)} \right) \quad (2-60)$$

Cette approximation montre que dans le cas d'une turbulence monophasique homogène l'énergie turbulente s'atténue selon une loi exponentielle avec la constante de temps

$$\tau_0 = \frac{k_{L0}}{\varepsilon_0} \quad (2-61)$$

En écoulement diphasique, les équations modélisées (2-21) et (2-22) se réduisent dans le cas de l'ascension des bulles dans un liquide au repos à :

$$0 = -\alpha_L \varepsilon + S_k \quad (2-62)$$

$$0 = -\alpha_L c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k_L} \varepsilon + S_\varepsilon \quad (2-63)$$

ce qui permet d'établir la relation suivante entre les deux termes sources S_k et S_ε :

$$S_\varepsilon = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k_L} S_k \quad (2-64)$$

En turbulence homogène, les équations (2-21) et (2-22) s'écrivent :

$$\alpha_L \frac{Dk_L}{Dt} = S_k - \alpha_L \varepsilon \quad (2-65)$$

$$\alpha_L \frac{D\varepsilon}{Dt} = S_\varepsilon - \alpha_L c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k_L} \varepsilon \quad (2-66)$$

En considérant la relation (2-64), l'équation (2-66) s'écrit également :

$$\alpha_L \frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k_L} [S_k - \alpha_L \varepsilon] \quad (2-67)$$

En combinant les équations (2-65) et (2-67) il vient :

$$\frac{1}{\varepsilon} \frac{D\varepsilon}{Dt} = c_{\varepsilon 2} \frac{1}{k_L} \frac{Dk_L}{Dt} \quad (2-68)$$

dont l'intégration, compte tenue des conditions initiales, donne :

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \left(\frac{k_L}{k_{L0}} \right)^{c_{\varepsilon 2}} \quad (2-69)$$

En divisant les deux membres de l'équation (2-62) par $\alpha_L k_{L0}$, on obtient, compte tenue de (2-69), l'équation suivante de l'énergie turbulente k_L :

$$\frac{1}{k_{L0}} \frac{Dk_L}{Dt} = \frac{S_k}{\alpha_L k_{L0}} - \frac{\epsilon}{k_{L0}} \left(\frac{k_L}{k_{L0}} \right)^{c_{\epsilon 2}} \quad (2-70)$$

On définit la constante a en posant :

$$a^2 = \frac{S_k}{\alpha_L \epsilon} \quad (2-71)$$

La résolution de l'équation (2-70) permet de déduire une solution analytique de l'énergie turbulente diphasique qui vérifie la relation suivante :

$$\left| \frac{\frac{k_L}{k_{L0}} - a}{\frac{k_L}{k_{L0}} + a} \right| = \left(\frac{1-a}{1+a} \right) \exp\left(-\frac{2a}{\tau_0} t\right) \quad (2-72)$$

On pose :

$$c = \frac{1-a}{1+a} \quad (2-73)$$

et on suppose $\frac{k_L}{k_{L0}} - a > 0$, l'équation (2-72) permet d'établir la relation :

$$\frac{k_L}{k_{L0}} = a \left[\frac{1 + \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{2at}{\tau_0}\right)}{1 - \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{2at}{\tau_0}\right)} \right] \quad (2-74)$$

qui permet d'estimer enfin le rapport $\frac{k_L}{k_{L0}}$:

$$\frac{k_L}{k_{L0}} \approx a \left[1 + \frac{2}{c} \exp\left(-\frac{2at}{\tau_0}\right) \right] \quad (2-75)$$

Cette expression montre que l'énergie turbulente en écoulement diphasique homogène uniforme s'atténue selon une loi exponentielle de manière analogue au cas monophasique, mais avec un temps caractéristique τ_d donné par :

$$\tau_d = \frac{\tau_0}{2a} \quad (2-76)$$

et une valeur asymptotique du rapport $\frac{k_L}{k_0}$ égale à :

$$a = \sqrt{\frac{S_k}{\alpha_L \epsilon_0}} \quad (2-77)$$

Les résultats (2-76) et (2-77), obtenus à partir des équations du modèle k- ϵ à une échelle de temps, sont en contradiction avec les résultats expérimentaux obtenus par Lance et al. (1991) concernant l'écoulement à bulles homogène uniforme derrière une grille. En effet, l'expression (2-76) montre que le temps d'atténuation τ_d en écoulement à bulles est différent du temps τ_0 correspondant au cas monophasique ; il dépendrait selon ce modèle de la constante a et par conséquent du taux de présence de la phase dispersée, ce qui n'est pas en concordance avec les résultats de Lance et al. (1991). Ces derniers montrent pour différents taux de vide que le temps caractéristique de l'atténuation de la turbulence diphasique est sensiblement identique à celui de l'écoulement monophasique, figure (2-3). D'autre part, l'expression (2-77) montre que la valeur asymptotique du rapport $\frac{k_L}{k_0}$ dépend de la valeur initiale du taux de dissipation ; on devrait s'attendre à ce que cette valeur dépende uniquement de l'énergie turbulente induite par la présence des bulles. Ce raisonnement, qui reste valable également pour la modélisation au second ordre, indique que la modélisation de la turbulence diphasique à une échelle de temps est incomplète ; elle s'avère insuffisante pour reproduire correctement le temps caractéristique de la décroissance de la turbulence homogène à bulles à l'aval d'une grille. Au fait la turbulence produite par la grille et la turbulence induite par les bulles sont deux phénomènes gouvernés par des mécanismes fondamentalement différents associés à des échelles différentes et il est nécessaire de les identifier pour en préciser les effets sur la structure de l'écoulement.

2.3.2 Modèles de turbulence à deux échelles de temps

2.3.2.1 Fermetures au premier ordre

Modèle de Sato et al. (1981)

Le modèle Sato et al. (1981) suppose que la vitesse instantanée du liquide \mathbf{u}_L se décompose en trois composantes statistiquement indépendantes : une valeur moyenne $\overline{\mathbf{u}_L}$, une composante fluctuante identique à la fluctuation monophasique \mathbf{u}'_L et une composante fluctuante associée aux perturbations induites par la présence des bulles \mathbf{u}''_L :

$$\mathbf{u}_L = \overline{\mathbf{u}_L} + \mathbf{u}'_L + \mathbf{u}''_L \quad (2-78)$$

Par conséquent, l'énergie turbulente dans le liquide k_L s'écrit comme la somme de l'énergie turbulente monophasique k_{L0} et de l'énergie turbulente induite par l'agitation des bulles k_{LB} :

$$k_L = k_{L0} + k_{LB} \quad (2-79)$$

Sato et Sekoguchi (1975) modélisent la viscosité turbulente selon le même principe en écrivant :

$$\nu_t = \nu_{tm} + \nu_B \quad (2-80)$$

où ν_{tm} est la viscosité turbulente monophasique et ν_B est une viscosité turbulente exprimée algébriquement par analyse dimensionnelle en fonction des grandeurs caractéristiques des bulles :

$$\nu_B = c_b \frac{d}{2} \alpha_G \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right| \quad (2-81)$$

où c_b est une constante fixée d'une manière empirique à la valeur 1.2.

La formulation de cette viscosité turbulente induite par les bulles revient à introduire une nouvelle échelle de temps caractéristique du mouvement des bulles. En effet, en exprimant l'énergie turbulente induite par l'agitation des bulles k_{LB} selon la solution analytique de Biesheuvel et Van

Wijngaarden, (1984) en écoulement potentiel homogène $k_{Lb} = \frac{1}{4} \alpha \overline{|\mathbf{u}_R|}^2$, l'expression (2-80) de la viscosité turbulente en écoulement diphasique pourrait se mettre sous la forme :

$$\nu_t = c_\mu \tau_t k_{L0} + c_b \tau_b k_{Lb} \quad (2-82)$$

Où τ_t et τ_b représentent les deux échelles de temps données par les relations suivantes :

$$\tau_t = \frac{k_{L0}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \tau_b \approx \frac{d}{\overline{|\mathbf{u}_R|}} \quad (2-83)$$

Cependant, on peut montrer aisément que le modèle de Sato et al (1981), maintenant très utilisé dans les codes de calcul, est incomplet ; il n'est pas en mesure de reproduire les diverses situations de turbulence en écoulement à bulles. En effet les modèles de double superposition de la turbulence ne peuvent qu'augmenter la production par les gradients moyens et sont donc incapables de reproduire l'atténuation de la turbulence observée dans plusieurs expériences d'écoulements à bulles (Wang et al 1987 ; Lee et al 1989 ; Liu et Bankoff 1990 ; Serizawa et al 1992). En particulier le modèle de Sato et al (1981) produirait pour des écoulements à bulles uniformément cisailés, des frottements turbulents toujours plus importants que ceux obtenus en écoulement monophasique avec le même gradient de vitesse. L'expérience de Lance et al (1991) montre que ce n'est pas toujours le cas, figures (2-4), (2-7), (2-8) et (2-9).

Modèle de Lopez de Bertodano et al. (1994)

Lopez de Bertodano et al (1994) supposent que la turbulence en écoulement à bulles peut être considérée comme la superposition d'une turbulence monophasique produite par cisaillement dans la phase liquide et d'une turbulence induite par les bulles de sorte que pour les faibles taux de présence de la phase dispersée, l'énergie cinétique turbulente s'écrit selon la relation :

$$k_L = k_{SI} + k_{BI} \quad (2-84)$$

Ils décomposent également le taux de dissipation selon :

$$\varepsilon = \varepsilon_{SI} + \varepsilon_{BI} \quad (2-85)$$

ainsi que la viscosité turbulente qu'ils écrivent en se basant sur le modèle de Sato et al. (1981):

$$v_t = v_t^{(SI)} + v_t^{(BI)} \quad (2-86)$$

avec :

$$v_t^{(SI)} = c_\mu \frac{k_{SI}^2}{\epsilon_{SI}} ; \quad c_\mu = 0.09 \quad (2-87)$$

$$v_t^{(BI)} = c_{\mu b} \frac{d}{2} \alpha_G \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right| ; \quad c_{\mu b} = 1.2 \quad (2-88)$$

L'énergie turbulente induite par les bulles k_{BI} est déterminée à l'aide d'une équation de transport modélisée selon un modèle de relaxation au premier ordre qui s'écrit :

$$\frac{D(\alpha_L k_{BI})}{Dt} = \nabla \cdot [\alpha_L v_t (\nabla k_{BI})] + \frac{1}{\tau_B} (k_{BI}^a - k_{BI}) \quad (2-89)$$

où τ_B est un temps caractéristique associé au déplacement des bulles et k_{BI}^a est l'énergie turbulente induite par les bulles dans un écoulement potentiel calculée à partir de la solution analytique d'Arnold (1988) :

$$k_{BI}^a = \frac{1}{2} c_{vm} \alpha_G \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|^2 \quad (2-90)$$

Avec le coefficient de la masse ajoutée $c_{vm} = \frac{1}{2}$ on retrouve le modèle de l'énergie pseudo-turbulente de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984).

L'énergie turbulente induite par cisaillement k_{SI} est modélisée par une équation de transport analogue à celle de l'écoulement monophasique où il ne figure que le taux de dissipation ϵ_{SI} :

$$\frac{D(\alpha_L k_{SI})}{Dt} = \nabla \cdot [\alpha_L v_t (\nabla k_{SI})] + \alpha_L [P_L - \epsilon_{SI}] \quad (2-91)$$

Le taux de dissipation ϵ_{SI} associé à la turbulence induite par cisaillement est modélisé à l'aide d'une équation de transport analogue à celle de l'écoulement monophasique :

$$\frac{D(\alpha_L \epsilon_{SI})}{Dt} = \nabla \cdot [\alpha_L v_t (\nabla \epsilon_{SI})] + \alpha_L \frac{\epsilon_{SI}}{k_{SI}} [c_{\epsilon 1} P_L - c_{\epsilon 2} \epsilon_{SI}] \quad (2-92)$$

En comparant la somme des équations (2-89) et (2-91) à l'équation générale (2-21) nous identifions les égalités suivantes :

$$\alpha_L \varepsilon = \alpha_L \varepsilon_{SI} + \frac{k_{BI}}{\tau_B} \quad (2-93)$$

$$S_k = \frac{k_{BI}^a}{\tau_B} \quad (2-94)$$

La relation (2-93) est en accord avec la décomposition (2-85) du taux de dissipation. Elle montre que la dissipation totale en écoulement à bulles peut être interprétée comme une superposition d'une dissipation induite par cisaillement dans le liquide et d'une dissipation induite par les bulles qui se produit au niveau des sillages et qui est contrôlée par l'échelle de temps caractéristique τ_B . Ce taux de dissipation est donné par la relation :

$$\varepsilon_{BI} = \frac{k_{BI}}{\tau_B} \quad (2-95)$$

Le terme de production interfaciale de l'énergie turbulente S_k est interprété comme la puissance développée par la force de traînée dans le mouvement relatif ; il s'écrit :

$$S_k = \alpha_G \frac{3}{4} \frac{c_D}{d} \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|^3 \quad (2-96)$$

Les équations (2-90), (2-94) et (2-96) permettent d'établir l'expression du temps τ_B qui s'écrit :

$$\tau_B = \left(\frac{2}{3} \frac{c_{vm}}{c_D} \right) \frac{d}{\left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|} \quad (2-97)$$

Appliqué à l'écoulement de turbulence homogène uniforme derrière une grille, le modèle de Lopez de Bertodano et al (1994) s'écrit :

$$\frac{Dk_{SI}}{Dt} = -\varepsilon_{SI} \quad (2-98)$$

$$\frac{D\varepsilon_{SI}}{Dt} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{SI}}{k_L} \varepsilon_{SI} \quad (2-99)$$

$$k_{BI} = k_{BI}^a \quad (2-100)$$

$$k_L = k_{BI}^a + k_{SI} \quad (2-101)$$

Le système d'équations (2-98)-(2-99), analogue au système monophasique (2-54)-(2-55), permet de générer en turbulence homogène la même structure de l'écoulement monophasique. Par conséquent, ce modèle permet de reproduire la décroissance quasiment monophasique observée dans les expériences de Lance et Bataille (1991) de l'écoulement à bulles à l'aval de la grille.

Cependant, si nous considérons le cas de la turbulence homogène à bulles soumise à un cisaillement constant, nous remarquons que ce modèle reste insuffisant : il ne permet pas de reproduire l'atténuation du frottement turbulent observée dans certains écoulements à bulles. En effet, l'ensemble des résultats expérimentaux présentés dans les figures (2-4), (2-7), (2-8) et (2-9) obtenus par Lance et al. (1991) en écoulement avec cisaillement constant indique une tendance à l'isotropie dans le cas diphasique, plus prononcée qu'en monophasique, ainsi qu'une sensible diminution du frottement turbulent. Cela implique que la modélisation de la viscosité turbulente en écoulement diphasique doit permettre de produire avec le même cisaillement, une réduction du frottement turbulent.

Notons u et v les composantes longitudinale (direction x) et transversale (direction y) de la vitesse du liquide dans l'écoulement. Le frottement turbulent s'exprime à l'aide de la viscosité turbulente par :

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} = S \approx \text{constante} \quad (2-102)$$

Revenons sur le modèle de Lopez de Bertodano et al. (1994) ; les équations du modèle s'écrivent en écoulement de cisaillement uniforme :

$$\frac{Dk_{SI}}{Dt} = \nu_t^{(SI)} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - \epsilon_{SI} \quad (2-103)$$

$$\frac{D\epsilon_{SI}}{Dt} = \frac{\epsilon_{SI}}{k_{SI}} \left[c_{\epsilon 1} \nu_t^{(SI)} \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \epsilon_{SI} \right] \quad (2-104)$$

$$k_{BI} = k_{BI}^a = \frac{1}{2} c_{vm} \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|^2 \quad (2-105)$$

$$v_t^{(SI)} = c_\mu \frac{k_{SI}^2}{\epsilon_{SI}} \quad (2-106)$$

$$v_t^{(BI)} = c_{\mu b} \frac{d}{2} \alpha_G \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right| \quad (2-107)$$

Le système d'équations (2-103), (2-104) et (2-106) est équivalent à celui du modèle $k-\epsilon$ monophasique dans le cas de l'écoulement turbulent homogène à cisaillement constant. Il en résulte que le modèle de Lopez de Bertodano et al. (1994) calcule la même valeur de la viscosité turbulente induite par cisaillement $v_t^{(SI)}$ que celle que produirait un modèle monophasique dans les mêmes conditions de l'écoulement liquide. Le frottement turbulent qui se décompose en partie turbulente et partie pseudo-turbulente s'écrit :

$$\overline{u'v'} = \overline{u'v'}^{(SI)} + \overline{u'v'}^{(BI)} \quad (2-108)$$

qui s'exprime également sous la forme :

$$\overline{u'v'} = (v_t^{(SI)} + v_t^{(BI)}) \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (2-109)$$

Le modèle de Lopez de Bertadano et al. (1994), bâti sur le principe de superposition des viscosités turbulentes de Sato et al (1981), ne peut pas reproduire la réduction du frottement turbulent observée en écoulement homogène avec cisaillement constant.

Ce modèle a été implanté dans le code industriel de CFD "PHOENICS" (Spalding et al 1988) avec les équations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement dans le liquide et dans le gaz modélisées selon le modèle de Ishii (1975) et mis en œuvre dans la simulation de deux écoulements ascendants à bulles en conduites cylindriques verticales et confronté aux expériences de Serizawa et al. (1986) et Wang et al. (1987). Les résultats numériques obtenus indiquent que le modèle reproduit d'une manière satisfaisante les résultats expérimentaux de Sérizawa et al. (1986) avec l'ajustement du coefficient de la masse ajoutée pour lequel on retient la valeur $c_{vm} = 2$. Le modèle reproduit également l'atténuation observée expérimentalement des composantes normales du tenseur de Reynolds (Figure (2-11)) et du frottement turbulent (Figure (2-12)) par comparaison aux valeurs correspondantes monophasiques.

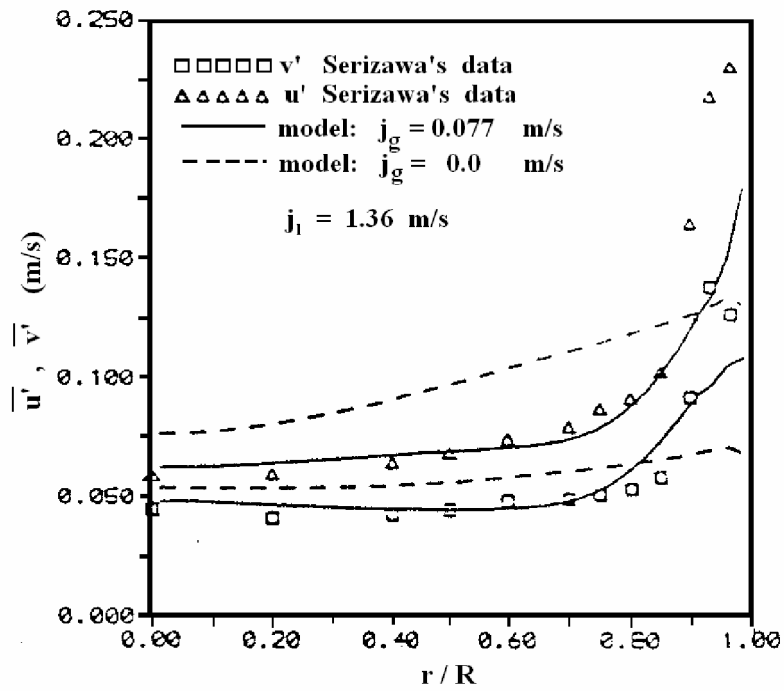


Figure (2-11) : Comparaison des composantes normales du tenseur de Reynolds avec les données expérimentales de Serizawa et al. (Lopez de Bertodano et al. (1994))

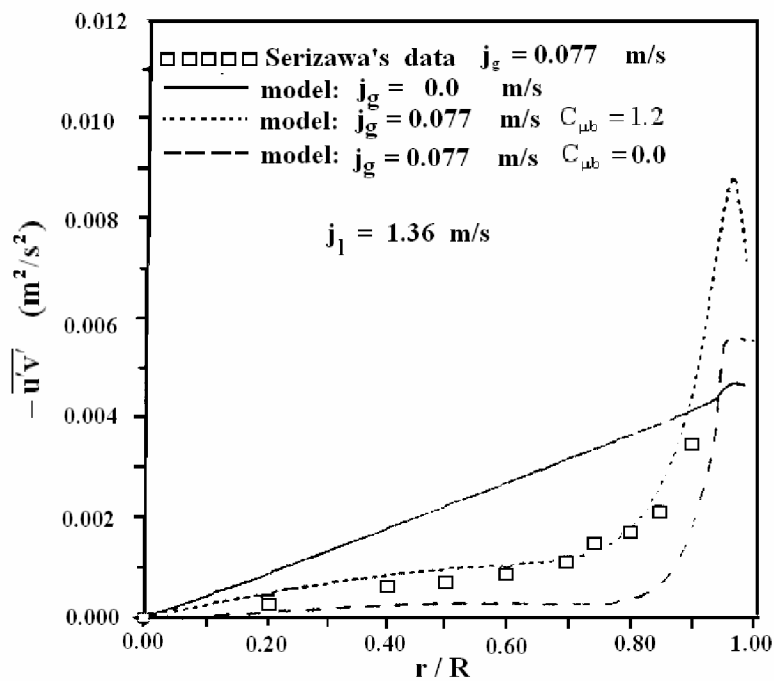


Figure (2-12) : Comparaison du frottement turbulent avec les données expérimentales de Serizawa et al. (Lopez de Bertodano et al. (1994))

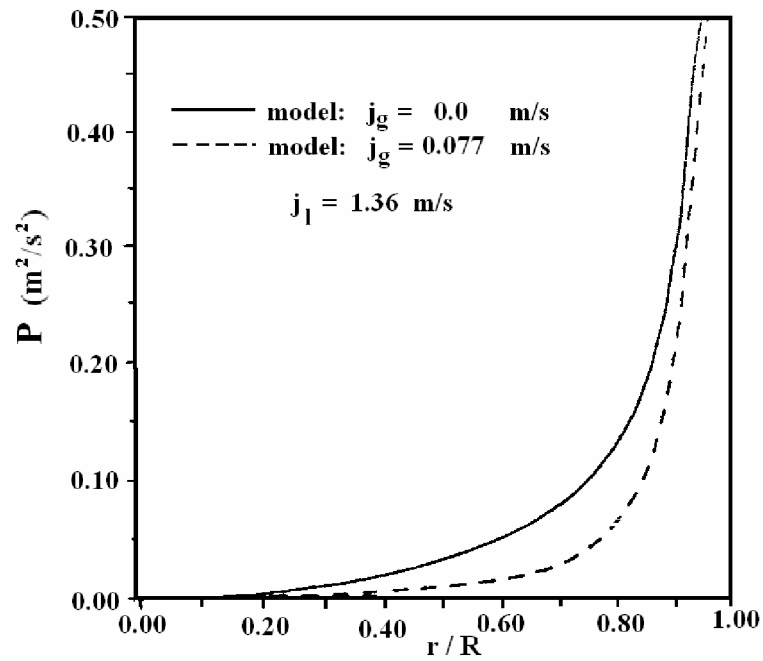


Figure (2-13) : Production par cisaillement de la turbulence dans le cas monophasique et diphasique (Lopez de Bertodano et al. (1994))

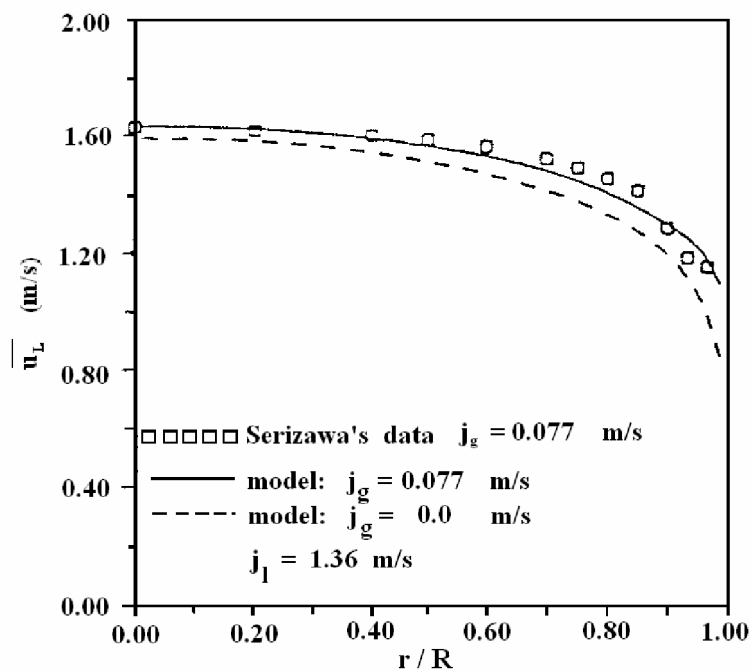


Figure (2-14) : Profil de la vitesse moyenne du liquide dans le cas monophasique et diphasique (Lopez de Bertodano et al. (1994))

Cependant, ces résultats plutôt positifs doivent être interprétés vis-à-vis de l'effet des gradients moyens sur la structure de la turbulence du liquide : l'ajustement de l'échange interfacial se traduit par un ajustement des gradients de vitesse de sorte que la production de la turbulence par cisaillement s'atténue. Celle ci s'écrit :

$$P_{SI} = -\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = \nu_t \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right)^2 \quad (2-110)$$

où r est la distance radiale par rapport à l'axe de la conduite (figures (2-13) et (2-14)).

D'ailleurs, l'application du modèle à l'expérience de Wang et al. (1987) (écoulements monophasique et diphasiques avec deux taux de vide différents) montre qu'avec la même valeur $c_{vm} = 2$, les niveaux de turbulence produits par le modèle et confrontés aux résultats expérimentaux n'indiquent pas une concordance aussi bonne que celle obtenue dans le cas de l'expérience de Sérizawa et al. (1986), figures (2-15) et (2-16). La figure (2-17) représentant le frottement turbulent montre d'importants écarts avec l'expérience qui expliquent la mauvaise prédiction du profil de vitesse moyenne, figure (2-18). D'ailleurs, les auteurs remarquent que les résultats sont améliorés en utilisant la valeur $c_{vm} = 1.2$ au lieu de 2, ce qui revient à un nouvel ajustement de l'échange interfacial.

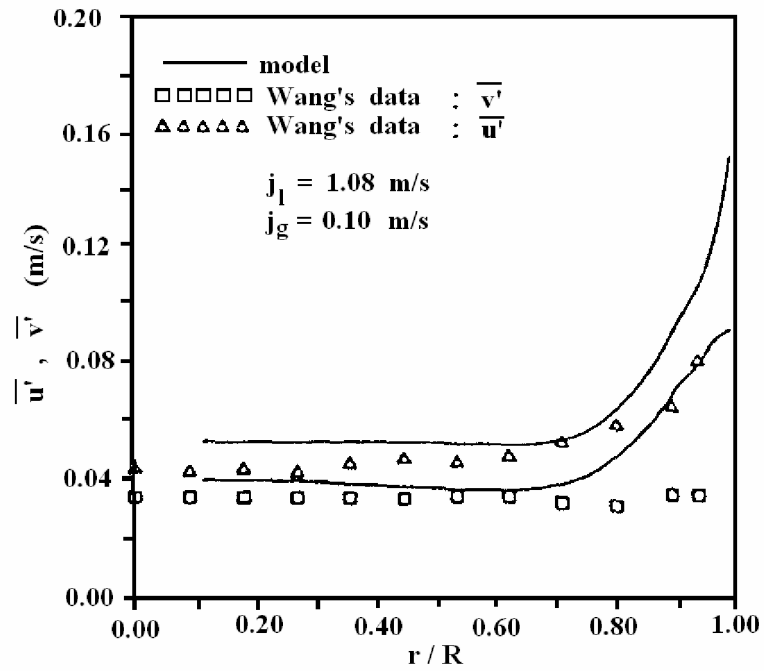


Figure (2-15) : Comparaison des composantes normales du tenseur de Reynolds avec les données expérimentales de Wang et al. (Lopez de Bertodano et al. (1994))

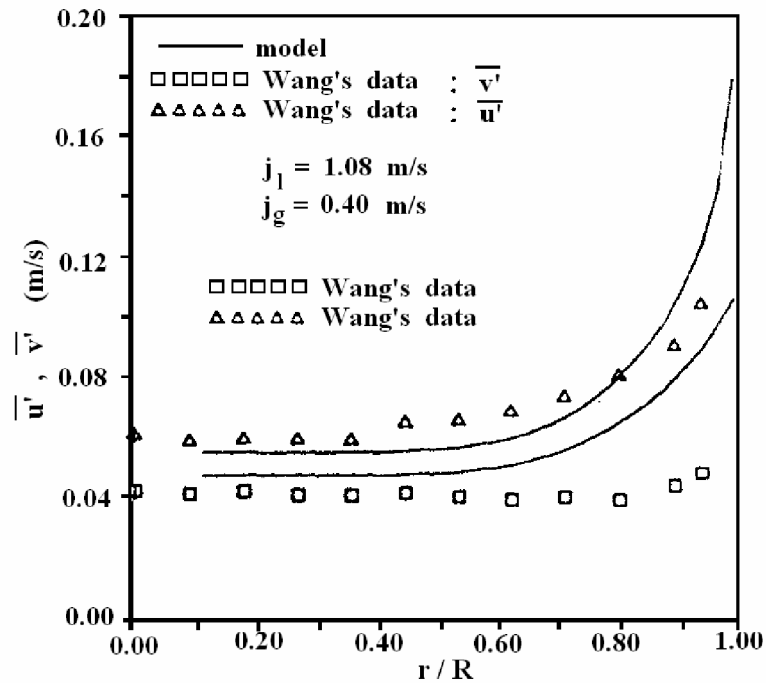


Figure (2-16) : Comparaison des composantes normales du tenseur de Reynolds avec les données expérimentales de Wang et al. (Lopez de Bertodano et al. (1994))

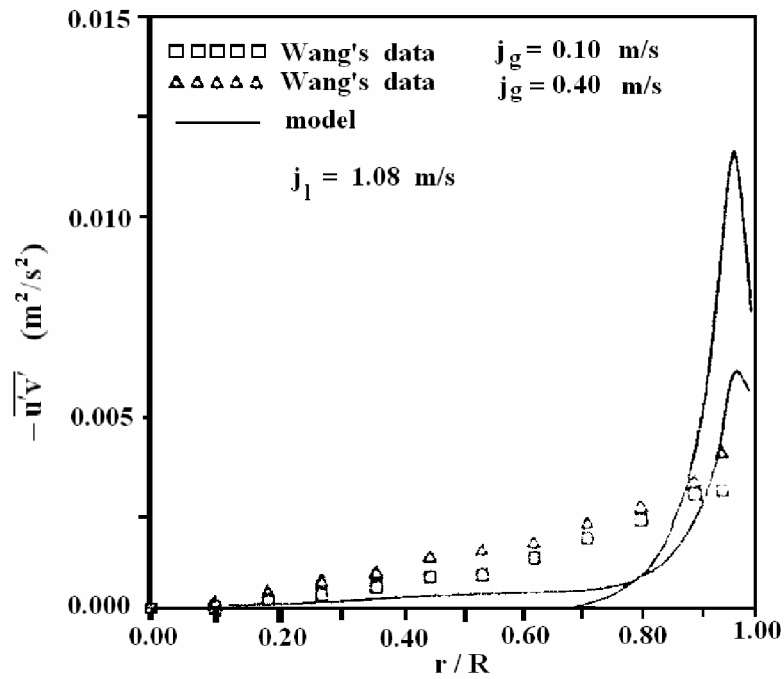


Figure (2-17) : Comparaison du frottement turbulent avec les données expérimentales de Wang et al. (Lopez de Bertodano et al. (1994))

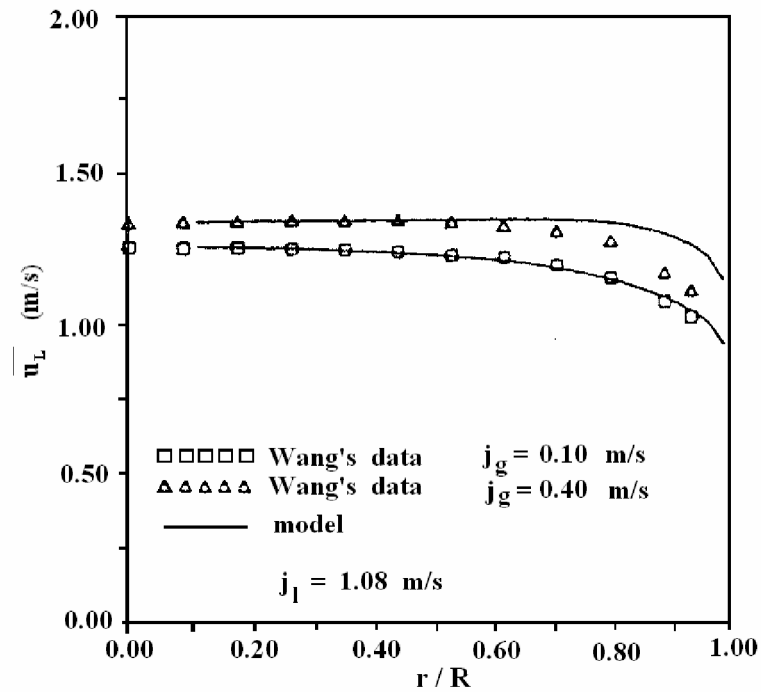


Figure (2-18) : Profil de la vitesse moyenne du liquide dans le cas diphasique à deux taux de vide différents (Lopez de Bertodano et al. (1994))

Modèle de Troshko et Hassan (2001)

Troshko et Hassan (2001) partent sur un principe de fermeture à deux échelles de temps pour modéliser les équations de transport de l'énergie turbulente k_L et de son taux de dissipation ε en écoulement à bulles. Ils n'adoptent cependant pas la méthode de décomposition de la turbulence produite par cisaillement et de la turbulence induite par les bulles. D'une manière analogue à la modélisation à une échelle de temps, l'équation de transport de l'énergie turbulente dans le liquide k_L est modélisée selon (2-3). Le terme de production interfacial S_k est exprimé par la puissance développée par la force interfaciale dans le mouvement relatif moyen essentiellement contrôlé par la puissance de la force de traînée. L'équation de transport modélisée de k_L s'écrit ainsi :

$$\frac{D}{Dt}(\alpha_L k_L) = \nabla \cdot \left[\alpha_L \left(\frac{v_t}{\sigma_k} + v \right) \nabla k_L \right] + \alpha_L (P_L - \varepsilon) + S_k \quad (2-111)$$

où P_L est la production par le gradient de la vitesse moyenne du liquide et S_k est modélisé par :

$$S_k = \frac{3}{4} \frac{c_D}{d} \alpha_G \left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|^3 \quad (2-112)$$

Les deux échelles de temps sont introduites dans la modélisation de l'équation de transport du taux de dissipation. Celle ci est modélisée selon l'équation (2-22) dans laquelle le mécanisme de destruction du taux de dissipation est associé à des fréquences propres à la turbulence et à la pseudo-turbulence ; on considère que le phénomène de destruction est réalisé à deux échelles de temps distinctes : une échelle contrôlée par les structures énergétiques de la turbulence dans la phase liquide analogue à celle de l'écoulement monophasique $\tau_0 = \frac{k_L}{\varepsilon}$, et une échelle décrivant les mécanismes de destruction au niveau des sillages des bulles pour laquelle on adopte l'expression (2-97) proposée par Lopez de Bertodano et al. (1994). L'équation modélisée de transport du taux de dissipation est ainsi modélisée sous la forme :

$$\frac{D}{Dt}(\alpha_L \varepsilon) = \nabla \cdot \left[\alpha_L \left(\frac{v_t}{\sigma_k} + v \right) \nabla \varepsilon \right] + \alpha_L \omega_0 (c_{\varepsilon 1} P_L - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) + \omega_b c_3 S_k \quad (2-113)$$

avec les fréquences caractéristiques suivantes :

$$\omega_0 = \tau_0^{-1} = \frac{\varepsilon}{k_L} \quad (2-114)$$

$$\omega_b = \tau_b^{-1} = \frac{3}{2} \frac{c_D}{c_{vm}} \frac{\|\mathbf{u}_R\|}{d} \quad (2-115)$$

Le coefficient c_3 est un coefficient empirique d'ajustement. La viscosité turbulente est formulée selon le modèle monphasique standard, elle s'écrit :

$$\nu_t = c_\mu \frac{k_L^2}{\varepsilon} \quad (2-116)$$

Les interactions interfaciales agissent par conséquent d'une manière implicite sur la viscosité turbulente par la modification des valeurs de l'énergie turbulente k_L et de son taux de dissipation ε en relation avec l'effet des termes interfaciaux qui apparaissent dans les équations de transport.

Le modèle de Troshko et Hassan (2001) ne se prête pas à une analyse simple dans le cas de la turbulence homogène à cisaillement constant : l'expression de la viscosité turbulente, exprimée en fonction de l'énergie totale et de son taux de dissipation ne permet pas une séparation des échelles. Cependant, l'analyse de l'écoulement de turbulence homogène de grille, permet une évaluation des fermetures proposées. Dans ce cas, le modèle de Troshko et Hassan (2001) se réduit à :

$$\frac{Dk_L}{Dt} = -\varepsilon + S_k \quad (2-117)$$

$$\frac{D\varepsilon}{Dt} = -c_2 \omega \varepsilon + c_3 \omega_b S_k \quad (2-118)$$

avec la relation :

$$\omega_b \gg \omega \quad (2-119)$$

Quand les bulles atteignent leur vitesse limite de glissement le terme S_k est constant, le système (2-117)-(2-118) s'écrit sous la forme :

$$\frac{Dk_L}{Dt} = -\varepsilon^* = -\varepsilon + S_k \quad (2-120)$$

$$\frac{D\varepsilon^*}{Dt} = -c_{\varepsilon 2} \omega \varepsilon^* + (c_3 \omega_b - c_{\varepsilon 2} \omega) S_k \quad (2-121)$$

Rappelons que les résultats expérimentaux de Lance et Bataille (1990) (Figure (2-3)) indiquent que la décroissance de la turbulence en écoulement diphasique avec le même temps caractéristique que dans le cas de l'écoulement monophasique. Pour que ce modèle reproduise la décroissance de la turbulence en écoulement diphasique à la fréquence ω de l'écoulement monophasique équivalent, les deux fréquences ω et ω_b doivent alors vérifier la condition :

$$c_3 \omega_b - c_{\varepsilon_2} \omega = 0 \quad (2-122)$$

qui est incompatible avec la relation (2-105). Remarquons également que la fréquence ω donnée par la relation :

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k_L} = \frac{\varepsilon_{SI} + \varepsilon_{BI}}{k_{SI} + k_{BI}} \quad (2-123)$$

n'est pas nécessairement égale à la fréquence monophasique ω_m .

Le modèle de Troshko et Hassan (2001) a été implanté dans le code industriel de CFD "CFX 4.2" (AEA Technology, 1997) et appliqué à la simulation des expériences de l'écoulement à bulles en conduite verticale de Wang et al. (1987), Serizawa et al. (1975) et de Liu (1998). Les résultats numériques relatifs la simulation des expériences de Wang et al. (1987) sont comparés à ceux obtenus par le modèle de Lopez de Bertodano et al. (1994), figures (2-19) – (2-24) ; la comparaison montre que les deux modèles produisent des résultats comparables. Les données de Wang et al. (1987) sont relatives à trois expériences d'écoulements à bulles en conduite verticale ($\alpha=0.132$, $\alpha=0.310$ et $\alpha=0.383$) et à l'expérience de l'écoulement monophasique équivalent. Les conditions de réalisation de ces expériences sont présentées dans le tableau (2-3).

Tableau (2-3) : Paramètres caractéristiques des expériences de Wang et al. (1987) considérées

Expérience	V_L (m/s)	V_G (m/s)	Taux de vide à l'entrée	Direction de l'écoulement
W0	0.43	0	-	Ascendant
W1	0.43	0.1	0.132	Ascendant
W2	0.43	0.27	0.310	Ascendant
W3	0.43	0.4	0.383	Ascendant

Le modèle est d'abord appliqué à l'écoulement monophasique pour lequel il produit des résultats parfaitement concordants avec les données expérimentales. Le coefficient c_3 a été ajusté à la valeur 0.45 dans la simulation de l'expérience W1 pour bien reproduire le pic du frottement turbulent au voisinage de la paroi (figure (2-19)). Dans le même temps, le modèle reproduit convenablement l'intensité turbulente longitudinale. Cependant avec cet ajustement, le modèle a du mal à reproduire la structure de la turbulence dans les deux autres écoulements diphasiques : les intensités turbulentes sont surestimées et le frottement turbulent est mal reproduit dans l'expérience W2.

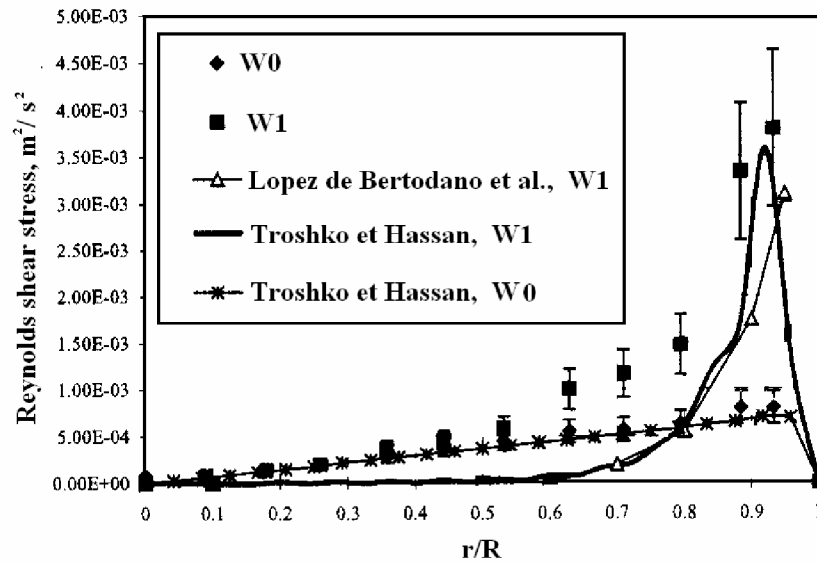


Figure (2-19) : Profils transversaux du frottement turbulent obtenus par le modèle de Troshko et Hassan en W0 et W1 et par le modèle de Lopez de Bertodano et al. en W1 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

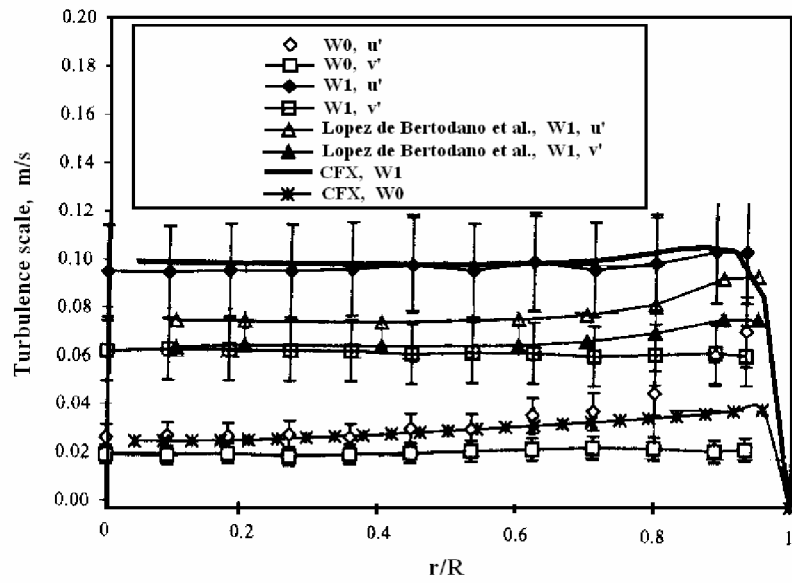


Figure (2-20) : Profils transversaux des intensités turbulentes obtenus par le modèle de Troshko et Hassan en W0 et W1 et par le modèle de Lopez de Bertodano en W1 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

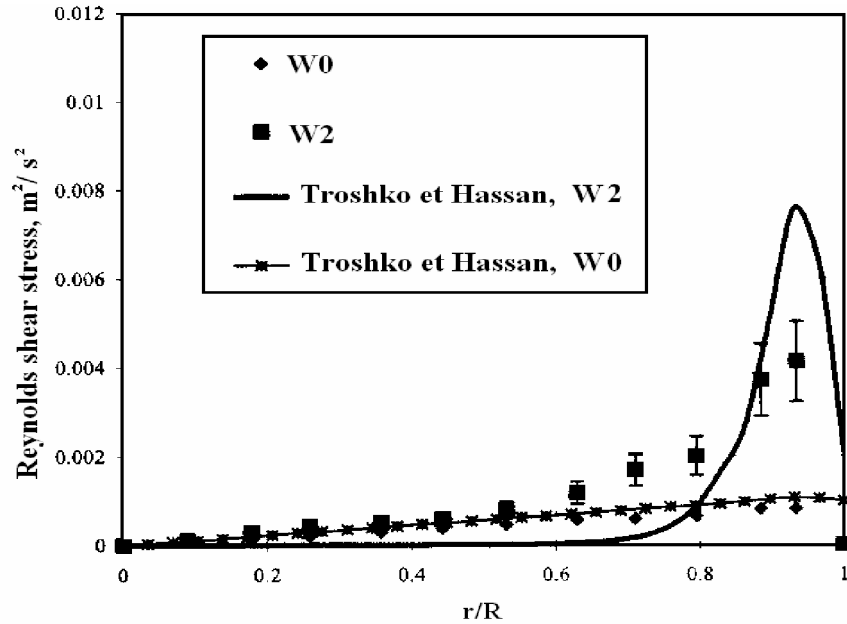


Figure (2-21) : Profils transversaux du frottement turbulent obtenus par le modèle de Troshko et Hassan en W0 et W2 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

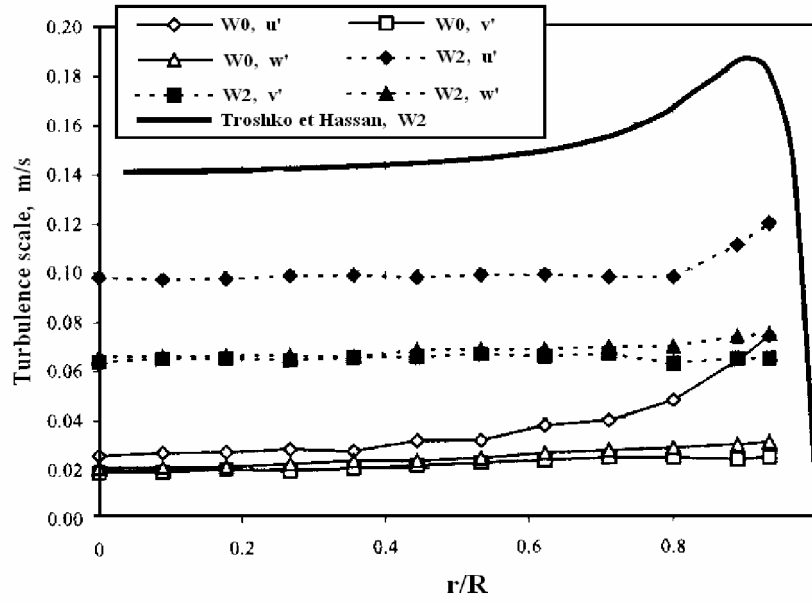


Figure (2-22) : Profil transversal de l'intensité turbulente définie par $u' = \sqrt{\frac{2}{3}k}$ obtenu par le modèle de Troshko et Hassan en W0 et W2 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

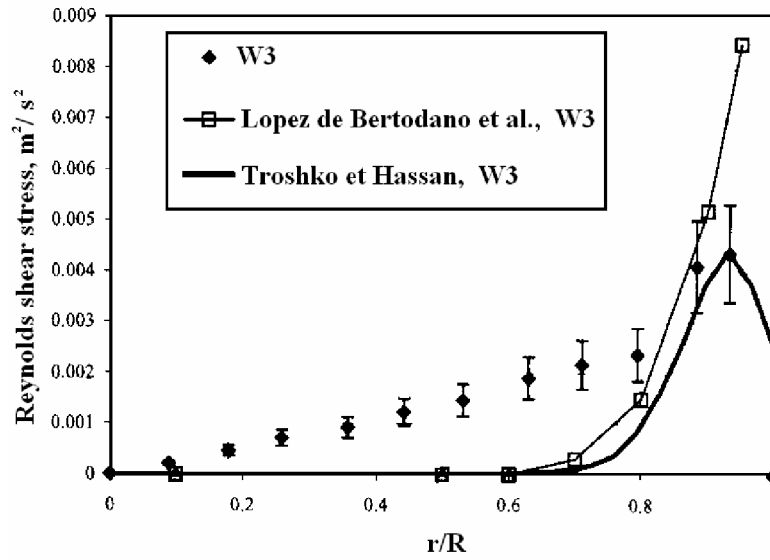


Figure (2-23) : Profils transversaux du frottement turbulent obtenus par les modèles de Troshko et Hassan et Lopez de Bertodano et al en W3 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

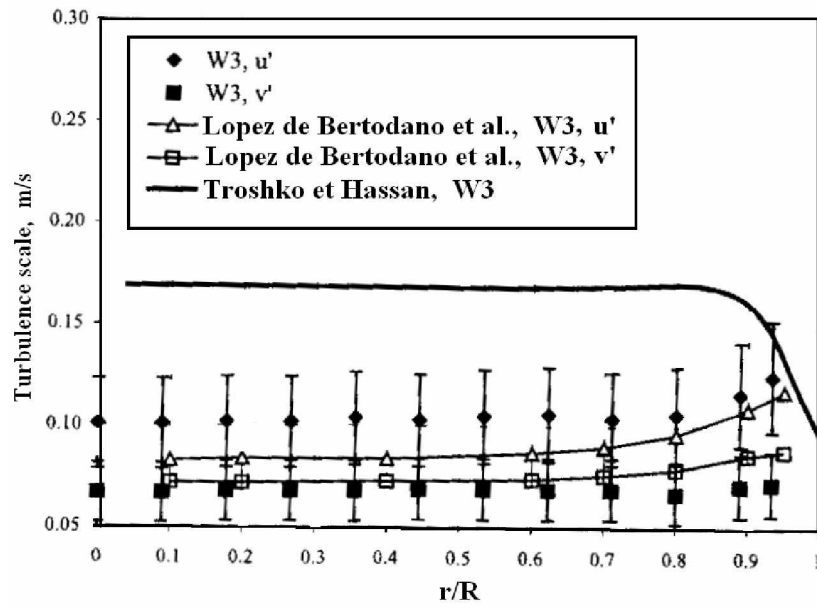


Figure (2-24) : Profils transversaux de l'intensité turbulente définie par $u' = \sqrt{\frac{2}{3}k}$ obtenu par le modèle de Troshko et Hassan et des intensités turbulentes obtenues par le modèle de Lopez de Bertodano et al en W3 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

La figure (2-25) présente la viscosité turbulente calculée par le modèle dans les différentes simulations.

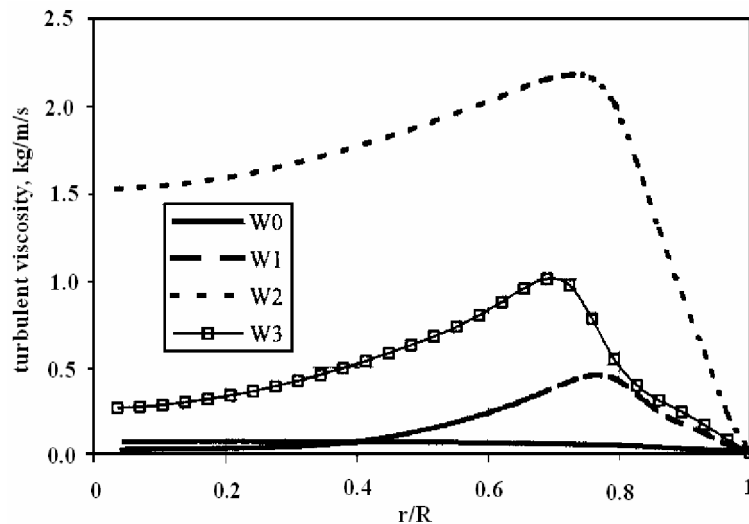


Figure (2-25) : Profils transversaux de la viscosité turbulente reproduits par le modèle de Troshko et Hassan dans les expériences W0, W1, W2 et W3 (D'après Troshko et Hassan, 2001)

2.3.2.2 Fermetures au second ordre

L'introduction d'une seconde échelle associée au mécanisme de production de la turbulence induite par les interactions interfaciales et la décomposition des mécanismes mis en jeu dans les écoulements à bulles constituent une avancée déterminante dans la modélisation de la turbulence dans ces écoulements. Cependant, il apparaît que cette décomposition, introduite directement dans les modèles au premier ordre, est incomplète. Elle se traduit tout simplement par une forme d'ajustement du bilan production-dissipation qui ne résiste pas à l'analyse une fois confrontée aux résultats expérimentaux des écoulements de turbulence homogène. Notre opinion est que les modèles au premier ordre sont incapables de prendre en compte l'effet des échanges interfaciaux sur les mécanismes de redistribution. Dans leurs expériences de l'écoulement de turbulence homogène avec cisaillement constant, Lance et al (1991) ont en effet mis en évidence l'important effet des interfaces sur les mécanismes d'étirement tourbillonnaire. Ils ont été les premiers à proposer une modélisation au second ordre dans laquelle on procède à une décomposition des échelles relatives à la turbulence et à la pseudo-turbulence dans la modélisation des termes de corrélation pression-déformation. Ces travaux ont été à l'origine des modélisations plus générales développées à l'ENIT, Chahed (1999).

Modèle de Lance et al. (1991)

Lance et al. (1991) ont proposé un modèle au second ordre pour les écoulements turbulents homogènes à bulles. Rappelons qu'en l'absence de diffusion, l'équation de transport du tenseur de Reynolds s'écrit d'une manière schématique sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \overline{(\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L)} = \mathbf{P}_L + \Phi + \mathbf{P} - \varepsilon \quad (2-124)$$

avec :

\mathbf{P}_L est le terme de production par cisaillement dans la phase liquide de la turbulence qui s'écrit d'une manière exacte :

$$\mathbf{P}_L = -\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} \cdot \overline{\nabla \mathbf{u}_L} - (\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} \cdot \overline{\nabla \mathbf{u}_L})^T \quad (2-125)$$

Φ est le terme de redistribution donné par la relation :

$$\Phi = \frac{1}{\rho_L} \overline{p'(\nabla \mathbf{u}'_L + (\nabla \mathbf{u}'_L)^T)} \quad (2-126)$$

\mathbf{P} représente la production de turbulence interfaciale donnée par l'expression (1-79) au chapitre 1 et ε est le terme de dissipation.

Dans le modèle de Lance et al. (1991), le tenseur de Reynolds représente toutes les fluctuations de vitesse du liquide ; celles produites par cisaillement et celles induites par les interactions interfaciales. Cependant la dissipation visqueuse est décomposée en deux contributions statistiquement indépendantes : une dissipation ε_L au niveau des micro-échelles de la turbulence dans le liquide résultant de la cascade d'énergie (supposée isotrope) et une dissipation ε_s dans les sillages des bulles.

Compte tenu des résultats expérimentaux obtenus en turbulence homogène (paragraphe 2.2), Lance et al (1991) supposent qu'il y a équilibre production - dissipation dans les sillages. Dans ces conditions, la seule dissipation qui subsiste dans les équations de transport des tensions turbulence est la dissipation isotrope ε_L qui se met sous la forme :

$$\varepsilon_L = \frac{2}{3} \varepsilon_0 \mathbf{I} \quad (2-127)$$

où ε_0 qui en écoulement de turbulence homogène avec cisaillement constant, est modélisée comme pour l'écoulement monophasique par l'équation de transport suivante:

$$\frac{D\varepsilon_0}{Dt} = \frac{\varepsilon_0}{k} [c_{\varepsilon 1} \mathbf{P}_L : \mathbf{I} - c_{\varepsilon 2} \varepsilon_0] \quad (2-128)$$

L'apport original dans le modèle de Lance et al. (1991) est relatif à la modélisation du terme de redistribution Φ de l'équation (2-124). Ce terme est décomposé comme en monophasique en partie linéaire (appelée également terme rapide) associée au couplage linéaire entre le mouvement moyen et fluctuant et partie non linéaire associée au couplage non linéaire entre les fluctuations de vitesse tel que :

$$\Phi = \Phi^{(NL)} + \Phi^{(L)} \quad (2-129)$$

Les auteurs retiennent la modélisation monophasique de Launder et al (1975) pour la partie linéaire et proposent pour la partie non linéaire, d'introduire un effet supplémentaire pour prendre en

compte la distorsion aléatoire des structures turbulentes provoquée par le mouvement turbulent des bulles. Lance et al (1991) proposent donc de modéliser la partie non-linéaire sous la forme:

$$\Phi^{(NL)} = -(c_1 \frac{\varepsilon_0}{k} + c_3 \alpha \frac{|\overline{\mathbf{u}_R}|}{d})(\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} - \frac{2}{3} k \mathbf{I}) \quad (2-130)$$

où apparaît une échelle de temps supplémentaire caractéristique du mouvement des bulles.

Les résultats numériques de l'évolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds sont comparés aux données expérimentales de Lance et al. (1991), figures (2-4), (2-7), (2-8), (2-9) et (2-10). La confrontation des résultats numériques aux données expérimentales montre une concordance satisfaisante. En particulier, le modèle réussit à produire l'accentuation de l'isotropie et la réduction du frottement turbulent induites par la présence des bulles.

Cependant, ce modèle de retour à l'isotropie, qui comprend l'ensemble des fluctuations conduit, en l'absence de contraintes extérieures imposées par le champ moyen, à une solution isotrope de la turbulence totale. Cela est incompatible avec les résultats expérimentaux obtenus en écoulement où la turbulence induite par les bulles est importante. En effet, les résultats expérimentaux de Mareuge et Lance (1995) de l'ascension des bulles dans un liquide au repos indiquent que la turbulence produite par les bulles est à caractère fortement anisotrope, figure (2-26). On remarque également que la turbulence en écoulement à bulles à l'aval de la grille est anisotrope, Lance (1986).

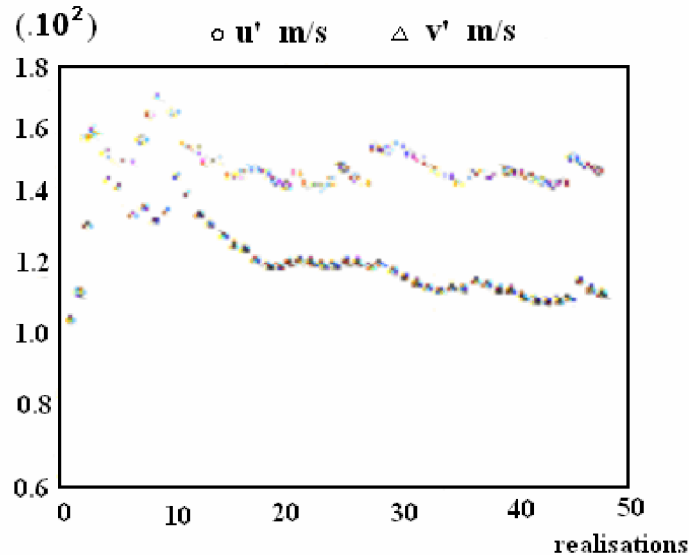


Figure (2-26) : Turbulence induite par des bulles en ascension libre dans un liquide au repos (D'après Mareuge et Lance, 1995)

Modèle de Chahed (1999)

Chahed (1999) s'appuie sur les travaux de Lance et al. (1991) pour proposer un modèle au second ordre où le tenseur de Reynolds est décomposé en deux contributions statistiquement indépendantes : une composante "pseudo-turbulente" associée aux fluctuations irrotationnelles non dissipatives d'origine purement interfaciale et une composante associée aux fluctuations "turbulentes" rotationnelles dissipatives qui comprend également les fluctuations dans les sillages des bulles:

$$\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L} = \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)} + \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(T)} \quad (2-131)$$

Chacune des composantes est décrite par une équation de transport spécifique. L'équation de transport de la composante pseudo-turbulente est modélisée en s'appuyant sur la solution théorique de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984) établie en écoulement potentiel homogène à bulles. Dans cet écoulement le tenseur des fluctuations turbulentes induites par le mouvement des bulles s'écrit :

$$\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)} = \frac{3}{20} \alpha \|\mathbf{u}_R\|^2 \mathbf{I} + \frac{1}{20} \alpha \mathbf{u}_R \mathbf{u}_R \quad (2-132)$$

L'équation de transport de la composante pseudo-turbulente proposée pour des écoulements inhomogènes est modélisée sous la forme :

$$\frac{D}{Dt} \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)} = \text{Diff}(\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)}) + \frac{D}{Dt} (\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)}) \quad (2-133)$$

Le dernier terme de l'équation (2-133) exprime l'écart par rapport à la solution potentielle (2-132) en écoulement homogène. Il représente une diffusion due précisément au caractère inhomogène de l'écoulement. Le dernier terme de (2-133) est interprété comme la contribution, en situation inhomogène, de la production interfaciale qui représente dans ce cas la puissance développée par la force de la masse ajoutée, et de la redistribution interfaciale par la corrélation pression-déformation.

La modélisation de l'équation de transport de la partie turbulente du tenseur de Reynolds s'inspire largement de la modélisation de Lance et al. (1991). En adoptant l'hypothèse production-dissipation dans les sillages des bulles, Chahed (1999) propose une équation de transport de la partie turbulente sous la forme synthétique suivante :

$$\frac{D}{Dt}(\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L})^{(T)} = \text{Diff}(\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L})^{(T)} + \mathbf{P}_L + \Phi - \frac{2}{3}\epsilon_0 \mathbf{I} \quad (2-134)$$

où ϵ_0 représente la dissipation visqueuse isotrope qui résulte de la cascade énergétique ; elle est déterminée à partir d'une équation de transport similaire à l'équation monophasique :

$$\frac{D\epsilon_0}{Dt} = \text{Diff}(\epsilon_0) + \frac{\epsilon_0}{k} [c_{\epsilon 1} \mathbf{P}_L : \mathbf{I} - c_{\epsilon 2} \epsilon_0] \quad (2-135)$$

Le terme de corrélation pression-déformation est décomposé en partie linéaire et en partie non-linéaire et modélisé selon les fermetures proposées par Lance et al. (1991). Cependant, dans la modélisation du terme non-linéaire Chahed (1999) ne retient que la partie turbulente du tenseur de Reynolds ce qui permet d'éviter les comportements inappropriés dans les écoulements où la pseudo-turbulence est dominante. Le modèle s'écrit ainsi sous la forme :

$$\Phi^{(NL)} = -c_1(\tau_t^{-1} + \alpha\tau_b^{-1})(\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L})^{(T)} - \frac{2}{3}k_0 \mathbf{I} \quad (2-136)$$

où τ_t est l'échelle de temps associée à la partie turbulente :

$$\tau_t = \frac{k_0}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad k_0 = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(T)} : \mathbf{I} \quad (2-137)$$

et τ_b l'échelle de temps caractéristique du mouvement des bulles pour laquelle on adopte l'expression proposée par Lance et al (1991) :

$$\tau_b = c_R \frac{d}{|\overline{\mathbf{u}_R}|} \quad (2-138)$$

La partie linéaire du terme de redistribution est modélisée d'une manière analogue à la modélisation monophasique de Launder et al. (1975).

Les termes de diffusion qui apparaissent dans les équations de transport (2-133), (2-134) et (2-135) sont modélisés en généralisant le modèle de Launder et al. (1975). Ainsi, la diffusivité est exprimée comme la somme des deux contributions une contribution turbulente associée à l'échelle de temps τ_t et une contribution pseudo-turbulente associée à l'échelle de temps τ_b . Le modèle de diffusion proposé s'écrit ainsi :

$$\text{Diff}(\varphi) = \frac{C_{s\varphi}}{(1-\alpha)} \nabla \cdot \left[(1-\alpha) (\tau_t \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L})^{(T)} + \tau_b \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L})^{(S)} \right] \cdot \nabla \varphi \quad (2-139)$$

Ce modèle a été mis en œuvre pour la simulation de plusieurs écoulements turbulents à bulles: homogène uniforme derrière une grille, homogène à cisaillement constant et cisailé libre de sillage correspondant respectivement aux expériences de Lance et Bataille (1990), Lance et al. (1991) et Roig et al. (1998). Les équations du modèle sont discrétisées par la méthode des différences finies et intégrées en mode parabolique. Les résultats numériques obtenus montrent une concordance satisfaisante avec les données expérimentales dans les différentes configurations d'écoulements comme le prouvent les figures (2-27)-(2-30).

Dans le cas de la turbulence homogène uniforme et à cisaillement constant, les niveaux de la turbulence et de son taux de dissipation ont été ajustés à l'entrée pour bien reproduire les résultats expérimentaux dans le cas monophasique. Dans la simulation des cas diphasiques les bulles sont injectées avec un glissement nul à l'entrée de l'écoulement où la partie turbulente du tenseur de Reynolds est identifiée à celle de l'écoulement monophasique. Les résultats obtenus dans le cas de la turbulence homogène de grille montrent que le modèle reproduit l'augmentation de l'intensité turbulente induite par la présence des bulles (Figure (2-27)).

L'application du modèle dans le cas de la turbulence à bulles homogène à cisaillement constant montre que le modèle reproduit la tendance l'augmentation de l'isotropie de la turbulence ainsi que la réduction du frottement turbulent (Figures (2-28) et (2-29)). Cette expérience a servi à ajuster le seul coefficient (le coefficient c_R) qui apparaît dans cette modélisation en plus des coefficients monophasiques du modèle de Launder et al (1975). La valeur retenue pour ce coefficient est $c_R = 0.67$.

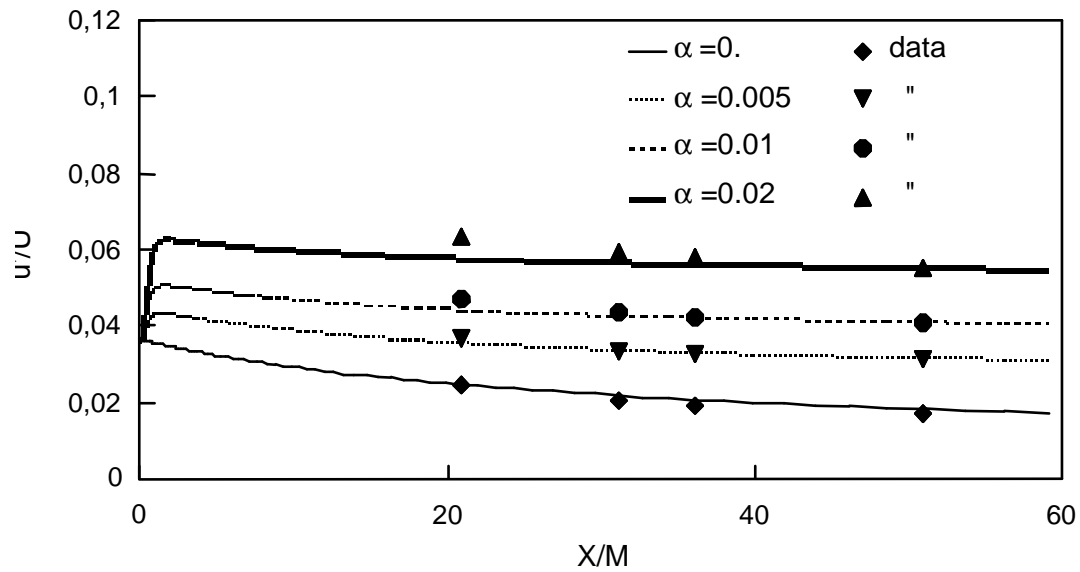


Figure (2-27) : Simulation par le modèle de Chahed (1999) de l'intensité turbulente en turbulence homogène de grille monophasique et à bulles. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Lance et Bataille (1990)

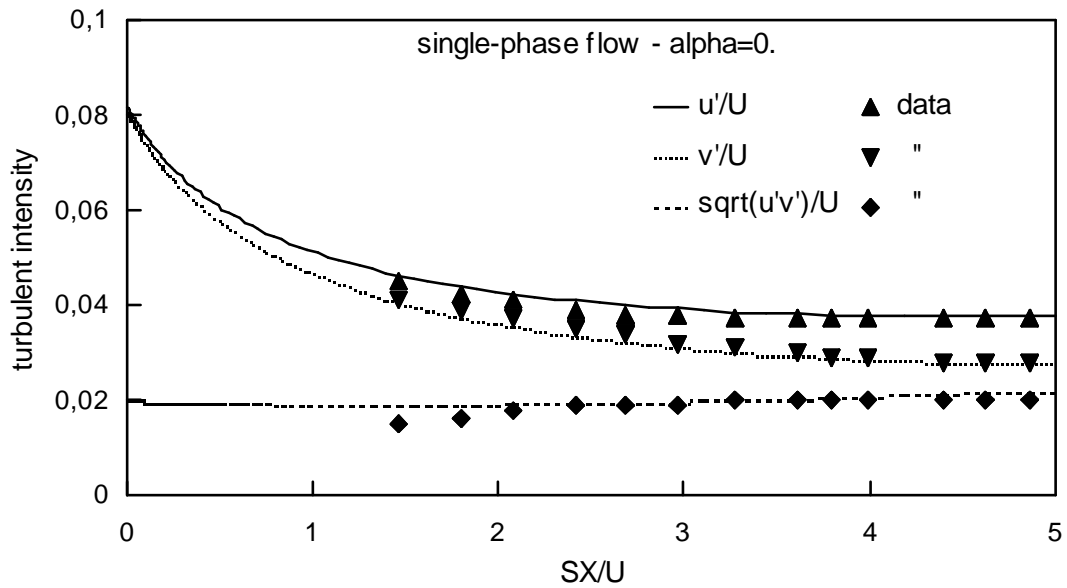


Figure (2-28) : Simulation par le modèle de Chahed (1999) des composantes du tenseur de Reynolds en turbulence homogène monophasique soumise à un cisaillement constant. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Lance et al (1990)

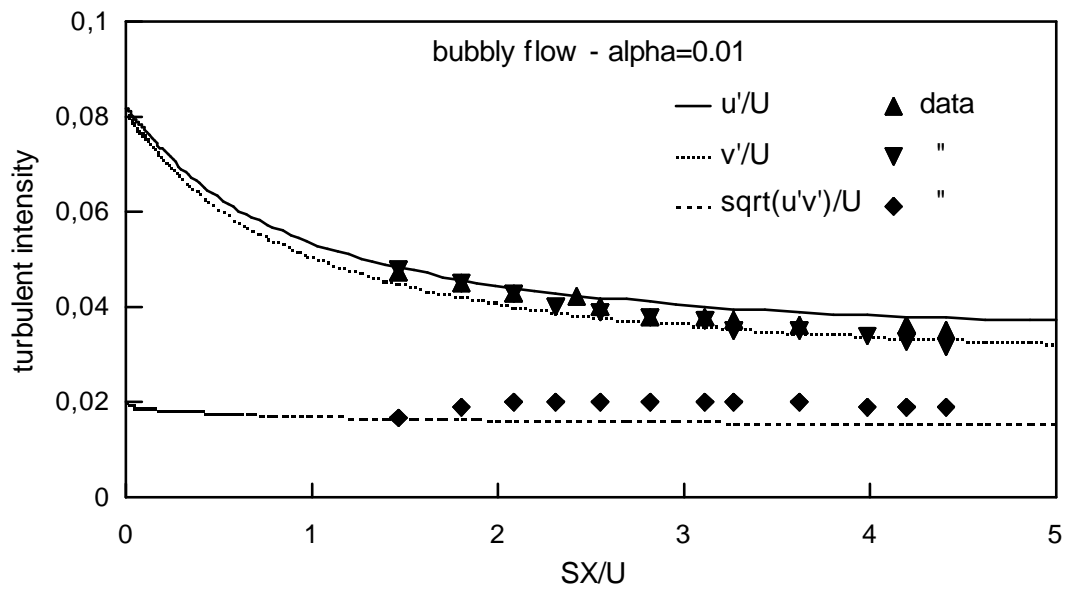


Figure (2-29) : Simulation par le modèle de Chahed (1999) des composantes du tenseur de Reynolds en turbulence homogène diphasique ($\alpha=1\%$) soumise à un cisaillement constant. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Lance et al (1990)

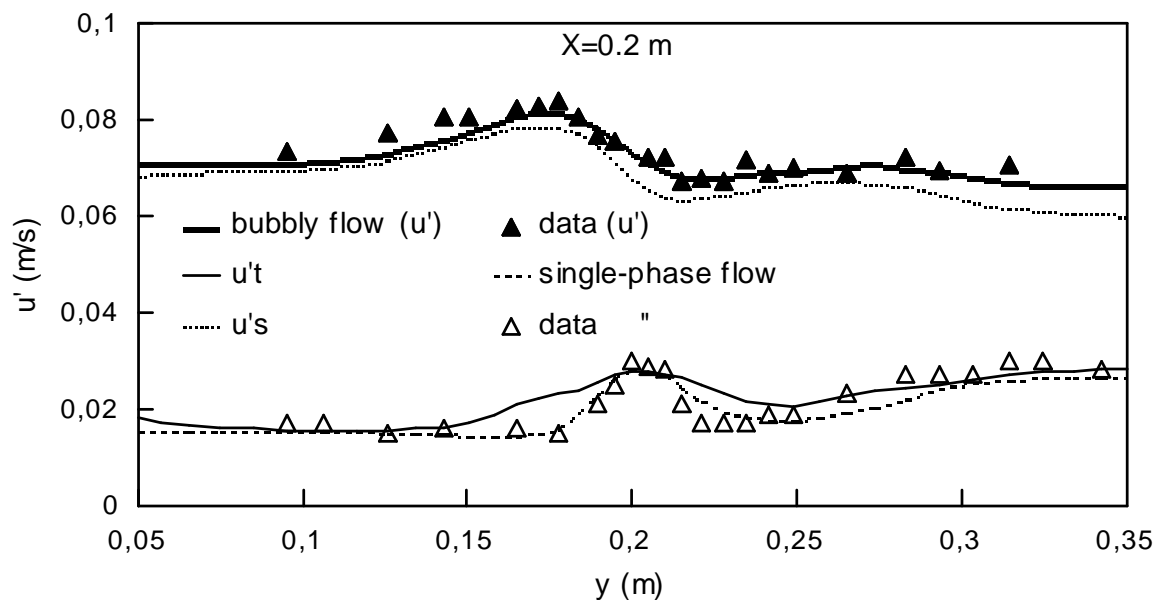


Figure (2-30) : Simulation par le modèle de Chahed (1999) de l'intensité turbulente longitudinale en écoulement de sillage monophasique et à bulles. Comparaison avec les résultats expérimentaux de Roig et al (1998)

L'application du modèle dans le cas de l'écoulement du sillage à bulles, montre que le modèle reproduit bien les grandeurs turbulentes dans des situations où la pseudo-turbulence est importante: il prédit bien l'augmentation importante de l'énergie cinétique de l'écoulement à bulles ainsi que l'élargissement des profils de vitesse moyenne.

Examinons maintenant, comme pour les autres modèles, le comportement du modèle dans les situations de l'écoulement homogène. Sans contribution turbulente (cas de l'ascension des bulles dans un liquide au repos), on peut aisément vérifier que le modèle dégénère vers une solution asymptotique compatible avec la solution de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984) :

$$\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(T)} = 0 \quad (2-140)$$

$$\overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(T)} = \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}^{(S)} = \overline{\mathbf{u}'_L \mathbf{u}'_L}_H^{(S)} \quad (2-141)$$

En écoulement turbulent homogène derrière une grille, le modèle de Chahed et al (2002) se réduit à une simple superposition de la turbulence et de la pseudo-turbulence qui explique que la décroissance de l'intensité turbulente à l'aval de la grille est comparable à celle de l'écoulement monophasique.

En turbulence homogène avec cisaillement uniforme, les équations de transport des tensions de Reynolds donnent :

$$\overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} = \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'}^{(T)} \quad \text{avec} \quad \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'}^{(S)} = 0 \quad (2-142)$$

$$\overline{u'^2} = \overline{u'^2}^{(T)} + \overline{u'^2}^{(S)} \quad (2-143)$$

$$\overline{v'^2} = \overline{v'^2}^{(T)} + \overline{v'^2}^{(S)} \quad \text{et} \quad \overline{w'^2} = \overline{v'^2} \quad (2-144)$$

Les équations du modèle de Chahed (1999) s'écrivent ainsi :

$$\frac{D}{Dt} \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} = -\overline{v'^2} S - C_1 \left(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} + (\gamma_1 \overline{v'^2} - \gamma_2 k + \gamma_3 \overline{u'^2}) S \quad (2-145)$$

$$\frac{D}{Dt} \overline{u'^2}^{(T)} = -2 \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} S - C_1 \left(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) (\overline{u'^2}^{(T)} - \frac{2}{3} k_0) + \frac{2}{3} (2\gamma_1 - \gamma_3) \overline{\mathbf{u}'\mathbf{v}'} S - \frac{2}{3} \epsilon_0 \quad (2-146)$$

$$\frac{D}{Dt} \overline{v'^2}^{(T)} = -C_1 \left(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) \overline{v'^2}^{(T)} - \frac{2}{3} k_0 - \frac{2}{3} (\gamma_1 - 2\gamma_3) \overline{u'v'} S - \frac{2}{3} \epsilon_0 \quad (2-147)$$

$$\frac{D}{Dt} \overline{u'^2}^{(S)} = \frac{4}{20} \frac{D}{Dt} \alpha u_R^2 \quad (2-148)$$

$$\frac{D}{Dt} \overline{v'^2}^{(S)} = \frac{3}{20} \frac{D}{Dt} \alpha u_R^2 \quad (2-149)$$

où $S = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ est le taux de cisaillement, k est l'énergie d'agitation dans le liquide décomposée également en contributions turbulente et pseudo-turbulente selon la relation suivante :

$$k = k_0 + k_s \quad (2-150)$$

avec :

$$k_0 = \frac{1}{2} (\overline{u'^2}^{(T)} + 2 \overline{v'^2}^{(T)}) \quad \text{et} \quad k_s = \frac{1}{2} (\overline{u'^2}^{(S)} + 2 \overline{v'^2}^{(S)}) \quad (2-151)$$

τ_b étant le temps caractéristique du déplacement des bulles donné par (2-127) et le taux de dissipation ϵ_0 est calculé à partir de l'équation de transport suivante :

$$\frac{D\epsilon_0}{Dt} = -C_{1\epsilon} \frac{\epsilon_0}{k_0} \overline{u'v'} S - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon_0^2}{k_0} \quad (2-152)$$

Ce modèle réussit à reproduire l'altération de la structure de la turbulence monophasique par la présence des bulles comme le montre les figures (2-29) et (2-30) du chapitre 2. Il apparaît que la distorsion aléatoire supplémentaire des tourbillons introduite dans la modélisation du terme de redistribution permet la prédiction de la tendance plus accentuée de retour à l'isotropie dans le cas diphasique. L'échelle de temps τ_b caractéristique de l'agitation des bulles a été ajustée par rapport à ce cas d'écoulement et la valeur retenue pour le coefficient C_R est égale à 0.67. Les autres constantes dans cette modélisation sont égales aux valeurs conventionnelles adoptées dans la modélisation au second ordre monophasique (Launder et al. 1975). Elles sont récapitulées dans le tableau (2-4) suivant :

Tableau (2-4) : Constantes du modèle au second ordre

γ_1	γ_2	γ_3	C_{sk}	C_{se}	C_1	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$
0.76	0.18	0.11	0.11	0.15	1.8	1.44	1.92

Lorsque l'écoulement atteint un état d'équilibre asymptotique caractérisé par des valeurs sensiblement constantes des composantes du tenseur de Reynolds, l'équation (2-136) se réduit à un équilibre production-redistribution qui permet d'exprimer algébriquement le frottement turbulent sous la forme :

$$-\overline{u'v'} = -\overline{u'v'}^{(T)} = \frac{((1-\gamma_1)\overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3 \overline{u'^2})}{C_1(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1})} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (2-153)$$

L'équation (2-153) permet d'interpréter le frottement turbulent en écoulement à bulles selon le concept de viscosité turbulente. Celle ci apparaît comme une réduction des fermetures au second ordre qui permet de conserver le contenu physique des fermetures notamment pour ce qui concerne les effets interfaciaux sur le mécanisme d'étirement tourbillonnaire.

2.4 Conclusion

Ce chapitre a été consacré à la présentation et à l'analyse des modélisations de la turbulence en écoulement à bulles avec un souci de classification des modèles. Deux critères nous ont semblé importants pour dégager des traits généraux caractéristiques des méthodes de modélisation : l'ordre de fermeture et le nombre d'échelles caractéristiques introduites dans la modélisation.

Cette analyse a montré que les modèles de turbulence au premier ordre ne sont pas capables de reproduire la structure de la turbulence en écoulement à bulles même si on procède à la décomposition des échelles mises en jeux. A ce niveau de fermeture, les modèles sont, dans leurs formulations classiques, inadaptés pour représenter les mécanismes de redistribution en particulier lorsque ces mécanismes sont altérés par la présence des interfaces. L'analyse indique également que la fermeture au second ordre de la turbulence apparaît comme un niveau de fermeture où il devient

possible de rendre compte des effets interfaciaux à condition de les préciser au travers d'échelles caractéristiques de la turbulence et de la turbulence induite par les bulles. Cela conduit à modéliser des équations de transport spécifiques pour la partie turbulence et pour la partie pseudo-turbulente (induite par les bulles) du tenseur de Reynolds. Rappelons finalement que la réduction des fermetures de la turbulence au second ordre développées par Chahed (1999) permet d'exprimer le frottement turbulent en écoulement à bulles selon le concept de viscosité turbulente.

Chapitre 3 : Modèles de turbulence à trois équations pour les écoulements à bulles

3.1 Introduction

L'analyse des modèles de turbulence développée dans le chapitre 2 indique qu'il faut remonter au second ordre pour arriver à un niveau de fermeture capable de prendre en compte les effets interfaciaux sur la structure de la turbulence en écoulement à bulles. Elle indique également qu'il est nécessaire de procéder à une décomposition de la turbulence pour lui associer des échelles différentes sensées représenter la turbulence propre du liquide et la turbulence induite par les bulles. Les relations de fermeture sont alors basées sur la décomposition du tenseur de Reynolds de la phase continue en une partie « pseudo-turbulente » produite par le mouvement relatif des inclusions et une partie « turbulente » produite par cisaillement dans la phase continue et dans les sillages ; chaque partie est prédéterminée séparément par une équation de transport.

Le développement de fermetures au second ordre de la turbulence avec deux échelles de temps pour les écoulements à bulles permet en effet de prendre en compte, dans la modélisation des équations de transport des tensions de Reynolds, les effets interfaciaux sur les différents mécanismes de production, de redistribution et de dissipation de la turbulence, Chahed et al (2002). Cependant la mise en œuvre de telles fermetures dans la prédétermination des écoulements dans le domaine des applications reste difficile et les modèles de turbulence à deux équations sont encore largement utilisés dans les codes industriels.

Nous nous proposons de développer un modèle au premier ordre pour les écoulements turbulents à bulles déduit par réduction des fermetures développées au second ordre. En effet, selon

la formulation des fermetures des équations de transport des tensions de Reynolds, le bilan simplifié production-redistribution dans l'équation du frottement turbulent en écoulement de cisaillement pur permet d'établir une expression de la viscosité turbulente qui met en jeu des échelles caractéristiques de la turbulence et de la pseudo-turbulence, Chahed (1999). Cette expression de la viscosité turbulente est à la base de la formulation de modèles au premier ordre adaptés aux écoulements à bulles à faibles taux de vide que nous nous proposons de développer dans ce chapitre.

Après avoir analysé les implications des fermetures au second ordre sur la prédétermination de la turbulence en turbulence homogène avec et sans cisaillement, nous proposons des réductions de ces modélisations. Ces réductions conduisent à une formulation analytique des composantes du tenseur de Reynolds décomposé en parties turbulente et pseudo-turbulente. Cette analyse est intéressante dans la mesure où elle permet, dans le cadre de l'hypothèse d'homogénéité, d'exprimer les parties turbulentes et pseudo-turbulentes du tenseur de Reynolds ; on a en effet besoin de spécifier ces contributions pour définir les conditions aux limites des modèles où on procède à la modélisation d'équations de transport pour chacune des contributions. Les réductions des fermetures au second ordre permettent également de développer des modèles au premier ordre (modèle $k-\epsilon$ et modèle $k-\omega$) que nous appliquerons ensuite à deux écoulements à bulles verticaux: il s'agit de l'écoulement homogène en aval d'une grille (Lance et Bataille 1991), et de l'écoulement à cisaillement constant (Lance et al 1991).

3.2 Réduction des fermetures au second ordre de la turbulence en écoulement à bulles

3.2.1 Composantes du tenseur de Reynolds en turbulence homogène uniformément cisailée

On utilise dans la suite les fermetures au second ordre de la turbulence pour interpréter les résultats expérimentaux de l'expérience de l'écoulement de turbulence homogène à bulles avec

cisaillement constant. Cette analyse permet de mettre en évidence les échelles caractéristiques relatives aux effets interfaciaux sur la structure de la turbulence. Le modèle de Chahed (1999) est formulé ci-dessous dans le cas d'un écoulement bidimensionnel turbulent homogène à bulles soumis à un cisaillement constant dans la situation asymptotique de l'équilibre énergétique. Les équations (2-145)-(2-149) de ce modèle de turbulence explicitées au chapitre 2 se réduisent sous la forme :

$$0 = -\overline{v'^2} S - C_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) \overline{u'v'} + (\gamma_1 \overline{v'^2} - \gamma_2 k + \gamma_3 \overline{u'^2}) S \quad (3-1)$$

$$0 = -2 \overline{u'v'} S - C_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) (\overline{u'^2}^{(T)} - \frac{2}{3} k_0) + \frac{2}{3} (2\gamma_1 - \gamma_3) \overline{u'v'} S - \frac{2}{3} \varepsilon_0 \quad (3-2)$$

$$0 = -C_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right) (\overline{v'^2}^{(T)} - \frac{2}{3} k_0) - \frac{2}{3} (\gamma_1 - 2\gamma_3) \overline{u'v'} S - \frac{2}{3} \varepsilon_0 \quad (3-3)$$

$$\overline{u'^2}^{(S)} = \frac{4}{20} \alpha u_R^2 \quad (3-4)$$

$$\overline{v'^2}^{(S)} = \frac{3}{20} \alpha u_R^2 \quad (3-5)$$

où $S = \frac{\partial u}{\partial y}$ est le taux de cisaillement et $\tau_b = C_R \frac{d}{|\overline{u_R}|}$ est le temps caractéristique du déplacement

des bulles. Le bilan énergétique se réduit pour la partie turbulente à un équilibre production-dissipation (équation (3-6)) et la partie pseudo-turbulente de l'énergie demeure constante et uniforme (équation (3-7)) :

$$0 = -\overline{u'v'} S - \varepsilon_0 \quad (3-6)$$

$$k_S = \frac{1}{4} \alpha u_R^2 \quad (3-7)$$

L'équation de transport du frottement (3-1) traduit un équilibre production-redistribution, il est intéressant de remarquer que cet équilibre permet d'exprimer algébriquement le frottement turbulent sous la forme :

$$-\overline{u'v'} = -\overline{u'v'}^{(T)} = \frac{((1 - \gamma_1) \overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3 \overline{u'^2})}{C_1 \left(\frac{\varepsilon_0}{k_0} + \alpha \tau_b^{-1} \right)} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3-8)$$

L'équation (3-8) est analogue à celle déduite dans le cas monophasique à ceci près qu'elle fait apparaître au dénominateur deux échelles de temps caractéristiques de la turbulence et de la pseudo-turbulence. La décomposition des échelles au second ordre va s'avérer essentielle dans l'interprétation des résultats avec des modèles d'ordre inférieur.

Compte tenu de l'équilibre production-dissipation (équation (3-6)), les équations (3-2) et (3-3) permettent de déduire les expressions suivantes des parties turbulentes des composantes normales du tenseur de Reynolds :

$$\overline{u'^2}^{(T)} = \frac{2}{3}k_0 + \frac{\frac{2}{3}(2-2\gamma_1 + \gamma_3)\epsilon_0}{C_1(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha\tau_b^{-1})} \quad (3-9)$$

$$\overline{v'^2}^{(T)} = \overline{w'^2}^{(T)} = \frac{2}{3}k_0 + \frac{\frac{2}{3}(\gamma_1 - 2\gamma_3 - 1)\epsilon_0}{C_1(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha\tau_b^{-1})} \quad (3-10)$$

Il est également possible de déduire les expressions des contributions pseudo-turbulentes des composantes normales du tenseur de Reynolds, à partir des équations (3-4), (3-5) et (3-7) :

$$\overline{u'^2}^{(S)} = \frac{4}{20}\alpha u_R^2 = \frac{4}{5}k_s \quad (3-11)$$

$$\overline{v'^2}^{(S)} = \overline{w'^2}^{(S)} = \frac{3}{20}\alpha u_R^2 = \frac{3}{5}k_s \quad (3-12)$$

En additionnant les contributions turbulentes et pseudo-turbulentes, on obtient des expressions analytiques des composantes normales du tenseur de Reynolds :

$$\overline{u'^2} = \frac{2}{3}k_0 + \frac{4}{5}k_s + \frac{\frac{2}{3}(2-2\gamma_1 + \gamma_3)\epsilon_0}{C_1(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha\tau_b^{-1})} \quad (3-13)$$

$$\overline{v'^2} = \overline{w'^2} = \frac{2}{3}k_0 + \frac{3}{5}k_s + \frac{\frac{2}{3}(\gamma_1 - 2\gamma_3 - 1)\epsilon_0}{C_1(\frac{\epsilon_0}{k_0} + \alpha\tau_b^{-1})} \quad (3-14)$$

3.2.2 Viscosité turbulente en écoulement à bulles

La relation (3-8) du frottement turbulent en écoulement diphasique traduit un équilibre entre les mécanismes de production par cisaillement du frottement turbulent et celui de la corrélation pression déformation. Elle met en jeu deux échelles de temps qui résultent de la décomposition des mécanismes d'étirement tourbillonnaire modélisé sous forme d'une superposition des effets turbulents et d'effets induits par les bulles dans leur mouvement aléatoire. Notons également que les composantes normales du tenseur qui apparaissent au numérateur comprennent les contributions turbulentes et pseudo-turbulentes. En décomposant l'énergie des fluctuations en contributions turbulente et pseudo-turbulente, le numérateur de l'équation (3-8) peut se mettre sous la forme suivante :

$$(1 - \gamma_1) \overline{v'^2} + \gamma_2 k - \gamma_3 \overline{u'^2} = C_1 [C_\mu k_0 + C_{\mu b} k_s] \quad (3-15)$$

avec les relations :

$$C_1 C_\mu = (1 - \gamma_1) \frac{\overline{v'^2}^{(T)}}{k_0} - \gamma_3 \frac{\overline{u'^2}^{(T)}}{k_0} + \gamma_2 \quad (3-16)$$

$$C_1 C_{\mu b} = \frac{3}{5} (1 - \gamma_1) - \frac{4}{5} \gamma_3 + \gamma_2 \quad (3-17)$$

Compte tenue de la décomposition (3-15), la relation (3-8) permet d'établir la formulation suivante de la viscosité turbulente diphasique :

$$\nu_t = C_\mu \frac{k_0^2}{\epsilon_0} \frac{(1 + \frac{C_{\mu b} k_s}{C_\mu k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} \quad (3-18)$$

D'après la relation (3-16), le coefficient C_μ dépend de l'anisotropie de la turbulence. Comme la structure de la turbulence est modifiée par la présence des bulles, on peut s'attendre à ce que le coefficient C_μ , et par conséquent le rapport $\frac{C_{\mu b}}{C_\mu}$, soit dépendant du taux de vide ainsi que des

caractéristiques de la phase dispersée (diamètre des bulles, vitesse relative). Les résultats numériques obtenus par le modèle au second ordre indiquent que le rapport $\frac{C_{\mu b}}{C_{\mu}}$ reste voisin de l'unité pour la gamme des faibles taux de vide simulés. La valeur du coefficient C_{μ} est choisie égale à 0.09 correspondant à la valeur communément utilisée dans la modélisation monophasique. Dans ces conditions, nous retenons la formulation suivante de la viscosité turbulente en écoulements à bulles :

$$v_t = C_{\mu} \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} = v_{t0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} \quad \text{avec} \quad C_{\mu} = 0.09 \quad (3-19)$$

Cette formulation met en évidence la contribution des interactions interfaciales dans la modification de la structure de la turbulence par comparaison au cas monophasique. L'agitation des bulles, caractérisée par l'énergie pseudo-turbulente k_s , induit une augmentation des fluctuations turbulentes dans la phase continue. Par contre, l'étirement tourbillonnaire provoqué par le mouvement relatif des bulles engendre une atténuation du frottement turbulent et par suite une atténuation de la production par cisaillement de la turbulence dans la phase continue. En écoulement à bulles à fort montant de l'énergie pseudo-turbulente, la modélisation (3-19) reproduit une augmentation de la viscosité turbulente diphasique. En revanche, lorsque le montant de l'énergie pseudo-turbulente est faible par rapport au montant de l'énergie turbulente, la formulation (3-19) reproduit dans certains cas une atténuation de la viscosité turbulente par comparaison au cas monophasique équivalent.

3.2.3 Structure de la turbulence à bulles en turbulence homogène uniformément cisailée

Pour mieux préciser les mécanismes qui entrent en jeu dans la modification de la structure de la turbulence en écoulement à bulles, on s'appuie sur la formulation (3-19) de la viscosité turbulente diphasique pour interpréter l'altération de la structure de la turbulence, caractérisée par le tenseur

d'anisotropie, par la présence de la phase dispersée en termes des grandeurs primaires de l'écoulement. Pour cela, nous nous proposons d'exprimer le tenseur d'anisotropie diphasique donné par l'expression :

$$b_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3-20)$$

en fonction de celui de l'écoulement monophasique équivalent. Le tenseur d'anisotropie diphasique s'écrit compte tenu de l'expression (3-20) et de la décomposition du tenseur de Reynolds en parties turbulente et pseudo-turbulente sous la forme suivante :

$$b_{ij} = (b_{ij}^{(T)} + \frac{2}{3} \delta_{ij}) \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0} \frac{b_{ij}^{(S)} + \frac{2}{3} \delta_{ij}}{b_{ij}^{(T)} + \frac{2}{3} \delta_{ij}})}{(1 + \frac{k_s}{k_0})} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3-21)$$

avec :

$$b_{ij}^{(T)} = \frac{\overline{u'_i u'_j}^{(T)}}{k_0} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad \text{et} \quad b_{ij}^{(S)} = \frac{\overline{u'_i u'_j}^{(S)}}{k_s} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \quad (3-22)$$

Il est possible d'exprimer le tenseur d'anisotropie $b_{ij}^{(T)}$ en écoulement à bulles en fonction du tenseur d'anisotropie de l'écoulement monophasique $b_{ij}^{(m)}$. L'analyse est en particulier focalisée sur les composantes du tenseur b_{11} , b_{22} et b_{12} qui peuvent être déduites à partir des résultats expérimentaux de Lance et al. (1991). Les relations algébriques (3-8), (3-9) et (3-10), permettent d'écrire ces composantes sous la forme :

$$\frac{b_{12}^{(T)}}{b_{12}^{(m)}} = \frac{\tau_t}{\tau_t^{(m)}} \frac{1 + \frac{k_s}{k_0}}{1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b}} \quad (3-23)$$

$$\frac{b_{11}^{(T)}}{b_{11}^{(m)}} = \frac{b_{22}^{(T)}}{b_{22}^{(m)}} = \frac{1}{1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b}} \quad (3-24)$$

où $\tau_t^{(m)}$ est l'échelle de temps de l'écoulement monophasique donnée par la relation (3-30). D'un autre côté, le tenseur d'anisotropie associé à la partie pseudo-turbulente du tenseur de Reynolds peut être déduit facilement à partir de la solution théorique en écoulement potentiel de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984). On obtient :

$$b_{12}^{(s)} = 0 \quad ; \quad b_{11}^{(s)} = \frac{2}{15} \quad ; \quad b_{22}^{(s)} = -\frac{1}{15} \quad (3-25)$$

Les relations (3-21), (3-23), (3-24) et (3-25) permettent ainsi de calculer les composantes du tenseur d'anisotropie en turbulence homogène à bulles uniformément cisailée en fonction du tenseur équivalent monophasique à condition de connaître les rapports entre les échelles de temps

$\frac{\tau_t}{\tau_t^{(m)}}$ et $\frac{\tau_t}{\tau_b}$, ainsi que le rapport entre les parties turbulente et pseudo-turbulente de l'énergie d'agitation $\frac{k_s}{k_0}$.

Nous écrivons le rapport des contributions turbulente et pseudo-turbulente dans l'énergie des fluctuations turbulentes sous la forme suivante :

$$\frac{k_s}{k_0} = \frac{1}{4} \alpha \frac{\overline{u_R^2}}{k_0} = \frac{1}{4} \alpha C_\mu C_R \frac{R_{eb}}{R_{et}^{(0)}} \frac{\tau_t}{\tau_b} \quad (3-26)$$

où $R_{et}^{(0)} = \frac{v_{t0}}{\nu}$ est le nombre de Reynolds turbulent (ν est la viscosité moléculaire) et $R_{eb} = \frac{\overline{u_R} d}{\nu}$

est un nombre de Reynolds caractéristique de l'agitation des bulles. La viscosité turbulente ainsi que la composante non diagonale b_{12} du tenseur d'anisotropie se mettent alors sous les formes suivantes :

$$\frac{v_t}{v_{t0}} = \frac{1 + \frac{1}{4} \alpha \frac{\overline{u_R^2}}{k_0}}{1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b}} = \frac{1 + \frac{1}{4} \alpha C_\mu C_R \frac{R_{eb}}{R_{et}^{(0)}} \frac{\tau_t}{\tau_b}}{1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b}} \quad (3-27)$$

$$\frac{b_{12}^{(T)}}{b_{12}^{(m)}} = \frac{\tau_t}{\tau_t^{(m)}} \frac{1 + \frac{1}{4} \alpha C_\mu C_R \frac{R_{eb}}{R_{et}^{(0)}} \frac{\tau_t}{\tau_b}}{1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b}} \quad (3-28)$$

La relation (3-27) montre que selon que la différence $(\frac{R_{eb}}{R_{et}^{(0)}} - \frac{4}{C_\mu C_R})$ est positive ou négative, le rapport $\frac{v_t}{v_{t0}}$ est supérieur ou inférieur à l'unité. Il faut cependant noter que $v_{t0} = C_\mu \frac{k_0^2}{\epsilon_0}$ ne représente pas la viscosité turbulente de l'écoulement monophasique équivalent, mais plutôt la viscosité turbulente qu'aurait l'écoulement monophasique soumis au même cisaillement et ayant le montant d'énergie turbulente k_0 et le même taux de dissipation. Nous soulignons également que l'expression (3-28) ne permet pas de déduire directement le sens de variation du rapport $\frac{b_{12}^{(T)}}{b_{12}^{(m)}}$.

3.2.3.1 Ecoulements à bulles à des très faibles taux de vide

On se place dans le cas de l'écoulement de turbulence homogène avec cisaillement constant à très faibles taux de vide pour exprimer les échelles qui entrent en jeu dans les relations (3-23), (3-24), (3-27) et (3-28). Dans ce cas, nous pouvons identifier le champ associé à la partie turbulente du tenseur de Reynolds (avec l'indice (0)) au champ monophasique. Cela signifie que la présence de la phase dispersée à très faibles taux de vide engendre une modification de la structure de la turbulence du liquide tout en préservant les échelles caractéristiques de la turbulence cisailée monophasique ($k_0 = k_m$ et $\epsilon_0 = \epsilon_m$). Nous déduisons alors les égalités suivantes :

$$\tau_t = \tau_t^{(m)} \quad \text{et} \quad R_{et}^{(0)} = R_{et}^{(m)} \quad (3-29)$$

Avec ces relations, l'équilibre production-dissipation dans le cas de la turbulence monophasique uniformément cisailée (équation (3-6)) permet d'exprimer simplement l'échelle de temps monophasique sous la forme:

$$\tau_t^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} S^{-1} \quad (3-30)$$

Compte tenue de l'expression de τ_b , le rapport $\frac{\tau_t}{\tau_b}$ s'écrit :

$$\frac{\tau_t}{\tau_b} = \frac{\tau_t^{(m)}}{\tau_b} = \frac{1}{C_R \sqrt{C_\mu}} \frac{S_b}{S} \quad (3-31)$$

où $S_b = \frac{\overline{u_R}}{d}$ est un taux de cisaillement caractéristique de la turbulence dans les sillages des bulles.

Dans ces conditions, l'expression (3-27) de la viscosité turbulente ainsi que les relations (3-23) et (3-24) correspondant au tenseur d'anisotropie peuvent s'écrire sous les formes suivantes :

$$\frac{\nu_t}{\nu_t^{(m)}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{C_\mu}}{4} \alpha \frac{R_{eb}}{R_{et}^{(m)}} \frac{S_b}{S}}{1 + \frac{1}{C_R \sqrt{C_\mu}} \alpha \frac{S_b}{S}} \quad (3-32)$$

$$\frac{b_{12}^{(T)}}{b_{12}^{(m)}} = \frac{1 + \frac{\sqrt{C_\mu}}{4} \alpha \frac{R_{eb}}{R_{et}^{(m)}} \frac{S_b}{S}}{1 + \frac{1}{C_R \sqrt{C_\mu}} \alpha \frac{S_b}{S}} \quad (3-33)$$

$$\frac{b_{11}^{(T)}}{b_{11}^{(m)}} = \frac{b_{22}^{(T)}}{b_{22}^{(m)}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{C_R \sqrt{C_\mu}} \alpha \frac{S_b}{S}} \quad (3-34)$$

où ne figurent que les variables primaires de l'écoulement (α , $\overline{u_R}$, $S = \frac{\partial \overline{u}}{\partial y}$ et S_b).

En particulier, la relation (3-33) indique que la présence des bulles à faibles taux de vide peut selon les cas, provoquer l'atténuation ou l'augmentation de la composante non diagonale b_{12} du tenseur d'anisotropie par rapport à l'écoulement monophasique équivalent. Selon la relation (3-33) le facteur dont dépend la composante b_{12} pour un taux de cisaillement et un taux de vide donnés est

le rapport $\frac{R_{eb}}{R_{et}^{(m)}}$. Selon que ce rapport est inférieur ou supérieur à une valeur seuil qui vaut

$$\frac{4}{C_{\mu} C_R} \approx 67, \text{ l'équation indique respectivement une atténuation ou une augmentation de } b_{12}.$$

Pour vérifier ces résultats on se propose de calculer cette composante dans le cas de l'expérience de Lance et al. (1991). Rappelons que dans ces expériences une atténuation du frottement turbulent a été mesurée en comparaison avec l'écoulement monophasique. En particulier, pour l'écoulement à bulles avec le taux de cisaillement de 2.9 s^{-1} , le nombre de Reynolds de l'écoulement équivalent monophasique $R_{et}^{(m)}$ est de l'ordre de 150, cette valeur est déduite des simulations numériques. Si on considère que les diamètres des bulles sont comprises dans l'intervalle 3-5 mm avec une vitesse relative comprise entre 0.2 et 0.4 m/s, le nombre de Reynolds associé au mouvement des bulles sera compris entre 600 et 2000 ce qui correspond à un rapport $\frac{R_{eb}}{R_{et}^{(m)}}$ compris entre 4 et 14 qui reste

assez faible par rapport à la valeur $\frac{4}{C_{\mu} C_R} \approx 67$.

Pour les très faibles taux de vide, le développement limité au premier ordre de la relation (3-32) conduit à la simplification suivante de l'expression de la viscosité turbulente :

$$v_t \approx v_t^{(m)} + \alpha \frac{S_b}{S} \left[\frac{\sqrt{C_{\mu}}}{4} R_{eb} - \frac{1}{C_R \sqrt{C_{\mu}}} R_{et}^{(m)} \right] \quad (3-35)$$

Cette approximation à très faibles taux de vide est très intéressante : elle permet une interprétation aisée de l'effet des interactions interfaciales sur la structure de la turbulence dans cette situation asymptotique. En effet, elle indique que pour un taux de vide et un taux de cisaillement donnés, la déviation de la viscosité turbulente en présence des bulles par rapport à celle de l'écoulement monophasique équivalent s'exprime en fonction de la différence entre les nombres de Reynolds R_{eb} et $R_{et}^{(m)}$. Cette relation indique que l'effet de la présence des bulles sur la turbulence peut être interprété comme une forme de substitution à l'échelle des bulles de la turbulence monophasique par la turbulence induite par les bulles. Tout se passe comme si la bulle dans son mouvement relatif entraîne une turbulence dans son sillage qui vient se substituer à la turbulence de l'écoulement

"monophasique". Cette turbulence modifie la viscosité turbulente qui selon les cas va être plus importante ou plus faible que la viscosité turbulente "monophasique".

La relation (3-35) montre, qu'à faibles taux de vide, la déviation de la viscosité turbulente par rapport à la situation monophasique dépend linéairement du rapport $\frac{S_b}{S}$. Rappelons que ce rapport est proportionnel à l'inverse du rapport des échelles de temps caractéristique de la turbulence et de la pseudo-turbulence.

Notons enfin que pour des écoulements bulles gouvernés par la pseudo-turbulence de telle sorte que nous pouvons négliger $R_{et}^{(m)}$ devant R_{eb} , la relation (3-49) se simplifie encore sous la forme :

$$v_t = v_t^{(m)} + v_b \quad \text{avec} \quad v_b = \left(\frac{\sqrt{C_\mu}}{4} v \right) \frac{S_b}{S} \alpha R_{eb} \quad (3-36)$$

Cette simplification du modèle (3-35) conduit à un modèle de superposition semblable à celui introduit par Sato et al (1981). Ce modèle exprime la viscosité turbulente diphasique comme la superposition de la viscosité monophasique et d'une viscosité induite par les bulles. Elle permet d'attribuer une signification physique au coefficient empirique introduit dans le modèle proposé par Sato et al (1981).

3.2.3.2 Ecoulements à bulles à taux de vide modéré

Considérons maintenant le cas de la turbulence homogène à bulles à cisaillement constant avec des taux de vide relativement plus importants mais qui demeurent assez faibles pour pouvoir négliger les interactions hydrodynamiques entre les bulles. Les expériences de Lance et al (1991) montrent que la présence de la phase dispersée même à faible taux de vide modifie considérablement la structure de la turbulence de l'écoulement diphasique. Il en résulte que la partie turbulente du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles est de manière générale différente du tenseur de Reynolds en écoulement monophasique. En termes d'échelles, ceci se traduit par un écart entre l'échelle de temps caractéristique monophasique $\tau_t^{(m)}$ et l'échelle de temps τ_t caractéristique des fluctuations turbulentes produites par cisaillement dans l'écoulement diphasique. En identifiant ces deux échelles pour les très faibles taux de vide, nous avons pu établir des relations simples entre les composantes du tenseur d'anisotropie de l'écoulement diphasique et de l'écoulement

monophasique équivalent. La formulation déduite dans ce cas de la viscosité turbulente de l'écoulement diphasique s'interprète de manière très aisée: elle s'exprime en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement monophasique turbulent et du nombre de Reynolds relatif au mouvement de la bulle (équation (3-32)).

On se propose dans cette section de déterminer la structure de la turbulence de l'écoulement diphasique en fonction de celle de l'écoulement monophasique équivalent en exprimant d'abord les relations entre les échelles caractéristiques de l'écoulement monophasique $\tau_t^{(m)}$ et l'échelle de temps τ_t caractéristique des fluctuations turbulentes produites par cisaillement dans la phase continue de l'écoulement diphasique

L'équilibre production-dissipation (3-6), avec la modélisation (3-19) de la viscosité turbulente diphasique, permet d'exprimer le rapport $\frac{\tau_t}{\tau_b}$ comme solution de l'équation au second degré suivante :

$$\left[\left(1 + \frac{k_s}{k_0} \right) \frac{\tau_b^2}{\tau_t^{(m)2}} \right] \left(\frac{\tau_t}{\tau_b} \right)^2 - \alpha \left(\frac{\tau_t}{\tau_b} \right) - 1 = 0 \quad (3-37)$$

La racine positive de cette équation est :

$$\frac{\tau_t}{\tau_b} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4 \left(1 + \frac{k_s}{k_0} \right) \frac{\tau_b^2}{\tau_t^{(m)2}}}}{2 \left(1 + \frac{k_s}{k_0} \right) \frac{\tau_b^2}{\tau_t^{(m)2}}} \quad (3-38)$$

Nous vérifions que la relation (3-38) admet comme valeur asymptotique lorsque le taux de vide tend vers zéro $\tau_t = \tau_t^{(m)}$. Les relations (3-21), (3-23), (3-24) et (3-25) permettent ainsi, à l'aide des équations (3-38) et (3-30), de calculer les composantes du tenseur d'anisotropie en turbulence homogène à bulles uniformément cisailée en fonction du tenseur équivalent monophasique à condition de connaître le rapport entre les parties turbulente et pseudo-turbulente de l'énergie d'agitation $\frac{k_s}{k_0}$. Ce rapport est calculé à partir des données expérimentales : l'énergie turbulente est

décomposée en contributions turbulente et pseudo-turbulente, la dernière contribution pseudo-turbulente est calculée à partir de la solution théorique de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984).

Les résultats de cette analyse sont récapitulés dans le tableau (3-1) où les composantes du tenseur d'anisotropie sont calculées dans le cas d'un écoulement à bulles uniformément cisailé pour deux taux de vide (Bellakhal et al 2004 a). Ces résultats sont comparés aux valeurs des composantes du tenseur d'anisotropie déduites des résultats expérimentaux de Lance et al. (1991) obtenus en situation d'équilibre (voir paragraphe 2.3 au chapitre 2).

Tableau (3-1) : Composantes du tenseur d'anisotropie en écoulement à bulles homogène uniformément cisailé

	Taux de vide %	0	1	1.4
b_{11}	Expression (53)	0.31	0.139	0.104
	Expérience	0.31	0.144	0.101
b_{22}	Expression (53)	-0.16	-0.072	-0.054
	Expérience	-0.16	-0.071	-0.051
b_{12}	Expression (53)	-0.3	-0.2	-0.17
	Expérience	-0.3	-0.21	-0.15

Les résultats présentés dans le tableau (3-1) indiquent un accord satisfaisant entre les résultats analytiques développés à partir des modélisations de la turbulence et les résultats expérimentaux. L'interprétation des modélisations au second ordre en terme d'échelles ramenées à des grandeurs primaires de l'écoulement permet de reproduire la modification de la structure de la turbulence induite par la présence des bulles en écoulement de turbulence homogène uniformément cisailée. Ces relations peuvent être utilisées pour spécifier les conditions aux limites des modèles de turbulence où il est nécessaire de spécifier les contributions turbulente et pseudo-turbulente du tenseur de Reynolds.

3.3 Modèles de turbulence au premier ordre pour les écoulements à bulles

3.3.1 Modèle k- ϵ à trois équations pour les écoulements à bulles

3.3.1.1 Ecoulement de turbulence homogène avec cisaillement uniforme

L'analyse développée dans le paragraphe précédent montre que la modélisation (3-19) de la viscosité turbulente diphasique déduite par réduction des fermetures au second ordre permet de reproduire l'effet de la présence des bulles sur la structure de la turbulence à l'état d'équilibre asymptotique en écoulement homogène uniformément cisailé. Avec cette formulation de la viscosité turbulente, il devient possible de modéliser les équations de transport de la partie turbulente et de la partie pseudo-turbulente de l'énergie cinétique turbulente en écoulement de turbulence homogène. Ces équations de transport s'obtiennent en calculant les demi-traces de celles des parties turbulente et pseudo-turbulente du tenseur de Reynolds. Avec la même équation modélisée du taux de dissipation, on aboutit au développement d'un modèle k- ϵ diphasique à trois équations basé sur la modélisation (3-19) de la viscosité turbulente et appliqué aux écoulements à bulles homogènes. Les équations de transport de l'énergie turbulente (décomposée en parties turbulente et pseudo-turbulente ($k = k_0 + k_s$)) et de son taux de dissipation ϵ_0 s'écrivent dans ce :

$$\frac{Dk_0}{Dt} = \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \epsilon_0 \quad (3-39)$$

$$k_s = \frac{1}{4} \alpha \left\| \overline{\mathbf{u}_R} \right\|^2 \quad (3-40)$$

$$\frac{D\epsilon_0}{Dt} = \frac{\epsilon_0}{k_0} \left[c_{\epsilon 1} \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - c_{\epsilon 2} \epsilon_0 \right] \quad (3-41)$$

Avec :

$$v_t = C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} = v_{t0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})}$$

3.3.1.2 Modélisation des termes de diffusion

La généralisation du modèle $k-\varepsilon$ à trois équations formulé plus haut pour l'écoulement de cisaillement uniforme renvoie à la nécessité de modéliser les termes de diffusion dans les équations de transport de l'énergie cinétique et du taux de dissipation. La modélisation de ces termes peut être obtenue par réduction de la fermeture des termes de diffusion proposée dans la modélisation au second ordre de Chahed (1999). Dans le modèle au second ordre, le terme de diffusion est modélisé par une loi de gradient avec un coefficient de diffusion qui inclue deux effets :

- la diffusivité turbulente $\overline{\tau_t \mathbf{u}' \mathbf{u}'}^{(T)}$ exprimée suivant le modèle de Launder et al (1975) avec le

temps de retournement $\tau_t = \frac{\text{trace}(\overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}^{(T)})}{2\varepsilon_0}$

- la diffusivité associée aux mouvements des bulles que nous proposons de modéliser sous la forme

tensorielle $\overline{\tau_b \mathbf{u}' \mathbf{u}'}^{(S)}$ avec le temps caractéristique τ_b associé au mouvement relatif des bulles,

défini par : $\tau_b = C_R \frac{d}{\|\overline{\mathbf{u}_R}\|}$

Le modèle des termes de transport diffusif qui généralise ainsi le modèle de Launder et al (1975) aux écoulements à bulles s'exprime sous la forme:

$$\text{Diff}(\Psi) = \frac{C_{s\Psi}}{1-\alpha} \nabla \left[(1-\alpha) (\tau_t \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}^{(T)} + \tau_b \overline{\mathbf{u}' \mathbf{u}'}^{(S)}) \nabla \Psi \right] \quad (3-42)$$

Au premier ordre, ce modèle se réduit sous la forme :

$$\text{Diff}(\phi) = \frac{C_{s\phi}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha) (\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}] \quad (3-43)$$

où $C_{s\phi} \tau_t k_0 = \frac{v_{t0}}{\sigma_\phi}$ est une diffusivité turbulente équivalente à celle de l'écoulement monophasique

et $C_{s\phi} \tau_b k_s = \frac{v_b}{\sigma_\phi} \approx \frac{C_b}{\sigma_\phi} \alpha d \left\| \overline{u_R} \right\|$ est une diffusivité induite par le déplacement des bulles. En

exprimant l'énergie cinétique induite par les bulles sous la forme $k_s = \frac{1}{4} \alpha \left\| \overline{u_R} \right\|^2$, la diffusivité induite par les bulles apparaît comme une généralisation du modèle de Sato et al (1981)

$$C_{s\phi} \tau_b k_s = \frac{v_b}{\sigma_\phi} \approx \frac{C_b}{\sigma_\phi} \alpha d \left\| \overline{u_R} \right\| \quad (3-44)$$

Avec cette modélisation des termes de diffusion, les équations de transport de l'énergie des fluctuations (parties turbulente et pseudo-turbulente) et du taux de dissipation du modèle de turbulence s'écrivent sous la forme suivante, elles constituent les équations du modèle $k - \epsilon$ à trois équations pour les écoulements à bulles :

$$\frac{D}{Dt} k_0 = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial k_0}{\partial x_j}] + v_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \epsilon_0 \quad (3-45)$$

$$\frac{D}{Dt} k_s = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial k_s}{\partial x_j}] + \frac{1}{4} \frac{D}{Dt} \alpha \left\| \overline{u_R} \right\|^2 \quad (3-46)$$

$$\frac{D}{Dt} \epsilon_0 = \frac{C_{s\epsilon}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial \epsilon_0}{\partial x_j}] + \frac{\epsilon_0}{k_0} \left[C_{1\epsilon} v_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - C_{2\epsilon} \epsilon_0 \right] \quad (3-47)$$

3.3.2 Modèle $k-\omega$ à trois équations pour les écoulements à bulles

3.3.2.1 Modèle $k-\omega$ en écoulement monophasique

Dans le cas monophasique, le modèle de turbulence $k-\omega$ développé par Wilcox (1988) utilise pour seconde grandeur caractéristique de la turbulence une fréquence caractéristique ω calculée à partir d'une équation de transport. La viscosité turbulente est définie par la relation suivante :

$$v_t = \frac{k}{\omega} \quad (3-48)$$

Le taux de dissipation de l'énergie turbulente s'écrit :

$$\varepsilon = \omega k \quad (3-49)$$

L'équation (3-49) implique que la fréquence ω peut être interprétée comme une fréquence caractéristique de la décroissance de la turbulence.

3.3.2.2 Viscosité turbulente en écoulement à bulles

La prise en compte de l'effet des interactions interfaciales sur le mécanisme d'étirement tourbillonnaire proposée par Chahed (1999) revient en quelque sorte à une décomposition de la fréquence ω en une fréquence associée à la turbulence produite par cisaillement ω_0 et une fréquence ω_b associée à la pseudo-turbulence en relation avec le mouvement des bulles. En effet, le modèle proposé par Chahed (1999) pour exprimer la partie non linéaire du terme de redistribution s'écrit :

$$\Phi_{ij}^{(NL)} = -C_1(\tau_t^{-1} + \alpha\tau_b^{-1})(\overline{u'_i u'_j})^{(T)} - \frac{2}{3}k_0\delta_{ij} = \Phi_{ij}^{(NL)} = -C_1(\omega_0 + \alpha\omega_b)(\overline{u'_i u'_j})^{(T)} - \frac{2}{3}k_0\delta_{ij} \quad (3-50)$$

Ce modèle revient à écrire :

$$\omega = \omega_0 + \alpha\omega_b \quad (3-51)$$

Cette décomposition permet de donner une signification physique pour la seconde échelle de temps introduite dans les fermetures au second ordre. Rappelons que l'échelle de temps introduite dans la modélisation au second ordre s'écrit :

$$\tau_b = C_R \frac{d}{|\mathbf{u}_R|} \quad (3-52)$$

où C_R est l'unique coefficient supplémentaire introduit dans le modèle de turbulence pour les écoulements à bulles. Il a été ajusté à partir des expériences de l'écoulement homogène à bulles

avec cisaillement uniforme de Lance et al (1991) et sa valeur a été fixée à $C_R = \frac{2}{3}$. La fréquence caractéristique de la turbulence induite par les bulles est interprétée par Lopez de Bertodano et al (1994) comme le rapport de la dissipation de la turbulence dans les sillages des bulles par la puissance développée par la force de traînée, ce qui permet d'exprimer ω_b par l'expression suivante :

$$\omega_b = \frac{3}{2} \frac{C_D}{C_A} \frac{\left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|}{d} \quad (3-53)$$

Il est intéressant de remarquer qu'avec les valeurs des coefficients $C_A = 0.5$ (valeur communément utilisée (Rivero 1991)) et que pour des bulles millimétriques $C_D = 0.44$ (Wallis et al 1964), la fréquence ω_b s'écrit :

$$\omega_b = 1.32 \frac{\left| \overline{\mathbf{u}_R} \right|}{d} \approx \tau_b^{-1} \quad (3-54)$$

On retrouve ainsi une valeur très proche de la valeur du coefficient C_R ajusté à partir des données expérimentales.

La viscosité turbulente diphasique s'écrit conformément à la décomposition (3-51) de ω et de l'énergie turbulente, sous la forme suivante :

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} = \frac{k_0}{\omega_0} \frac{1 + \frac{k_s}{k_0}}{1 + \alpha \frac{\omega_b}{\omega_0}} \quad (3-55)$$

3.3.2.3 Equations de transport de k et de ω en écoulement à bulles

Deux principaux résultats peuvent être déduits à partir de cette formulation de la viscosité turbulente : d'une part, nous retrouvons un résultat similaire à celui obtenu par réduction des fermetures au second ordre mais d'une manière plus "naturelle" : il n'est pas nécessaire de considérer la situation particulière de la turbulence homogène à bulles uniformément cisailée pour

établir la formulation (3-55). D'autre part cette formulation de l'échelle caractéristique de la turbulence induite par les bulles met en jeu des propriétés physiques relatives à la phase dispersée et pourrait donc permettre d'élargir le champ d'applications de la viscosité turbulente aux écoulements diphasiques dispersés gaz-solide, liquide-solide ou liquide-liquide.

Le taux de dissipation de la partie turbulente de l'énergie d'agitation est donné conformément à la relation (3-49) par l'expression suivante :

$$\varepsilon_0 = \omega_0 k_0 \quad (3-56)$$

Les équations de transport en écoulement homogène de la partie turbulente de l'énergie k_0 (3-39) et de son taux de dissipation (3-41) permettent, compte tenu de (3-56), d'établir l'équation de transport en écoulement homogène de la fréquence ω_0 qui s'écrit :

$$\frac{D\omega_0}{Dt} = [C_{\varepsilon 1} - 1] \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - (C_{\varepsilon 2} - 1) \omega_0^2 \quad (3-57)$$

Dans le cas du modèle de turbulence k - ε diphasique, les équations de transport de l'énergie turbulente k_0 et de son taux de dissipation ε_0 (équations 3-45 et 3-47) ont les mêmes formes que les équations monophasiques sauf au niveau du terme de diffusion et de la formulation de la viscosité turbulente adoptée. Selon la même démarche, l'équation de transport de la fréquence ω_0 modélisée est analogue à l'équation monophasique en adoptant la nouvelle formulation de la viscosité turbulente ainsi que la modélisation (3-43) du terme de diffusion.

Les équations de transport du modèle de turbulence k - ω diphasique que nous proposons s'écrivent ainsi :

$$\frac{D}{Dt} k_0 = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1-\alpha) \left(\frac{k_0}{\omega_0} + \frac{k_s}{\omega_b} \right) \frac{\partial k_0}{\partial x_j} \right] + \nu_t \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) - \beta^* k_0 \omega_0 \quad (3-58)$$

$$\frac{D}{Dt} k_s = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1-\alpha) \left(\frac{k_0}{\omega_0} + \frac{k_s}{\omega_b} \right) \frac{\partial k_s}{\partial x_j} \right] + \frac{1}{4} \frac{D}{Dt} \alpha \left| \overline{u_R} \right|^2 \quad (3-59)$$

$$\frac{D}{Dt} \omega_0 = \frac{C_{s\varepsilon}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(1-\alpha) \left(\frac{k_0}{\omega_0} + \frac{k_s}{\omega_b} \right) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_j} \right] + \lambda \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} - \beta \omega_0^2 \quad (3-60)$$

avec la formulation (3-55) de la viscosité turbulente et l'expression (3-53) de la fréquence ω_b . Les constantes adoptées dans ce modèle sont celles de Wilcox (1988) à savoir :

$$\lambda = 0.55 \quad ; \quad \beta = 0.075 \quad \text{et} \quad \beta^* = 0.09 \quad (3-61)$$

3.4 Test des modèles de turbulence à trois équations en turbulence homogène à bulles

3.4.1 Equations de transport en turbulence homogène à bulles

Les modèles de turbulence à trois équations (k- ϵ et k- ω) développés dans ce chapitre sont formulés ci-dessous pour des écoulements homogènes à bulles, uniforme et à cisaillement constant, dans un plan vertical oxy (Bellakhal et al 2004 a, b). On note \bar{u} et \bar{v} les composantes longitudinale (direction x) et horizontale (direction y) de la vitesse moyenne du liquide et u' et v' les fluctuations correspondantes. Dans ces deux écoulements la composante transversale de la vitesse du liquide est nulle. Pour la phase dispersée, la composante transversale est également nulle $\bar{v}_G = 0$ et la composante longitudinale est à glissement constant par rapport à phase continue égale à la vitesse limite.

Le tenseur de Reynolds comprend une partie turbulente et une partie pseudo-turbulente soit avec les hypothèses de l'écoulement homogène et conformément aux principes de modélisation on a :

$$\overline{u'^2} = \overline{u'^2}^{(T)} + \overline{u'^2}^{(S)} \quad ; \quad \overline{v'^2} = \overline{v'^2}^{(T)} + \overline{v'^2}^{(S)} \quad ; \quad \overline{u'v'}^{(S)} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{u'^2}^{(T)} = \overline{v'^2}^{(T)} \quad (3-61)$$

Selon les fermetures proposées, les équations des modèles de turbulence à trois équations pour les écoulements de turbulence homogènes à bulles s'écrivent :

Modèle k-ε :

$$\frac{D}{Dt} k_0 = \nu_t S^2 - \epsilon_0 \quad (3-62)$$

$$\frac{D}{Dt} k_s = \frac{1}{4} \frac{D}{Dt} (\alpha |\mathbf{p}_R|^2) \quad (3-63)$$

$$\frac{D}{Dt} \epsilon_0 = \frac{\epsilon_0}{k_0} [C_{1\epsilon} \nu_t S^2 - C_{2\epsilon} \epsilon_0] \quad (3-64)$$

Modèle k-ω :

$$\frac{D}{Dt} k_0 = \nu_t S^2 - \beta^* k_0 \omega_0 \quad (3-65)$$

$$\frac{D}{Dt} k_s = \frac{1}{4} \frac{D}{Dt} (\alpha |\mathbf{p}_R|^2) \quad (3-66)$$

$$\frac{D}{Dt} \omega_0 = \lambda S^2 - \beta \omega_0^2 \quad (3-67)$$

Avec S le taux de cisaillement nul dans le cas de l'écoulement uniforme de grille ; il est constant dans le cas de l'écoulement à cisaillement constant. Les composantes du tenseur de Reynolds sont déduites à partir des relations de fermeture (3-13) et (3-14).

Les équations des modèles sont discrétisées par la méthode des différences finies et intégrées en mode parabolique : Le domaine continu (x,y) est remplacé par un maillage discret dont nous avons choisi qu'il soit irrégulier dans la direction de l'écoulement (le maillage est resserré dans la première zone de l'écoulement). Les résultats numériques sont calculés de proche en proche en allant de l'amont vers l'aval.

3.4.2 Turbulence homogène de grille

Les deux modèles à trois équations (k,ε et k,ω) sont équivalents en écoulement de turbulence homogène de grille, ils reproduisent les mêmes résultats numériques. Dans les simulations d'écoulement de grille, les bulles sont injectées avec un glissement nul au niveau de la grille où la turbulence est supposée être celle de l'écoulement monophasique. La turbulence au droit de la grille a été ajustée, par le calage des valeurs de l'énergie turbulente et du taux de dissipation (de la

fréquence ω_0 pour le modèle $k-\omega$) à l'entrée de l'écoulement, afin de reproduire les résultats des expériences réalisées en monophasique. Sur la figure (3-1) on observe une bonne validation du calcul de l'intensité turbulente en aval de la grille dans le cas monophasique et trois écoulements à taux de vide différents (vitesse moyenne 0.6 m/s, taille de la maille $M = 0.04$ m) : le glissement généré par le bilan moyen de quantité de mouvement dans le gaz permet alors de reproduire la turbulence interfaciale, de sorte que le niveau de la turbulence totale soit correctement prédit, ainsi que sa décroissance pour les différents taux de vide

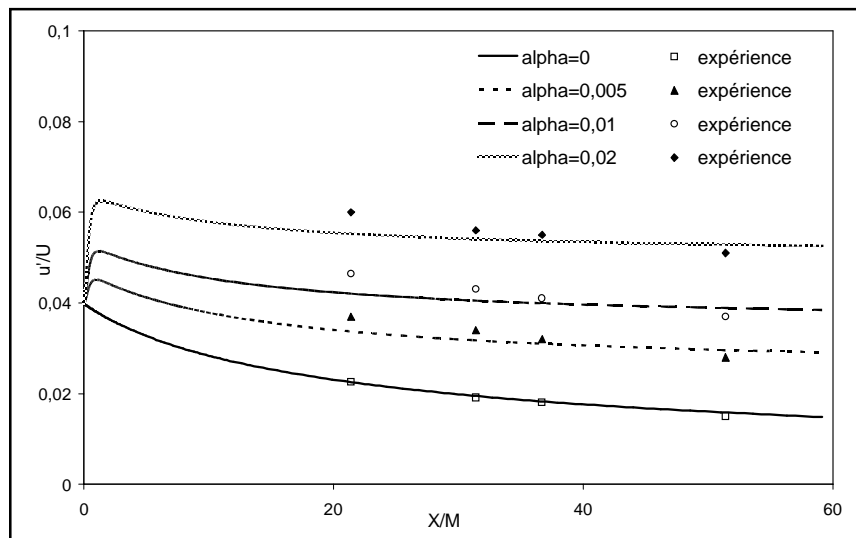


Figure (3-1) : Décroissance de l'intensité turbulente $\sqrt{u'^2}/U$ derrière une grille. Comparaison des résultats des deux modèles avec les données expérimentales de Lance et Bataille (1991), ($M = 4$ cm).

L'intensité turbulente mesurée à une distance donnée de la grille dépend fortement du taux de vide et de la vitesse de l'écoulement comme le montre la figure (3-2).

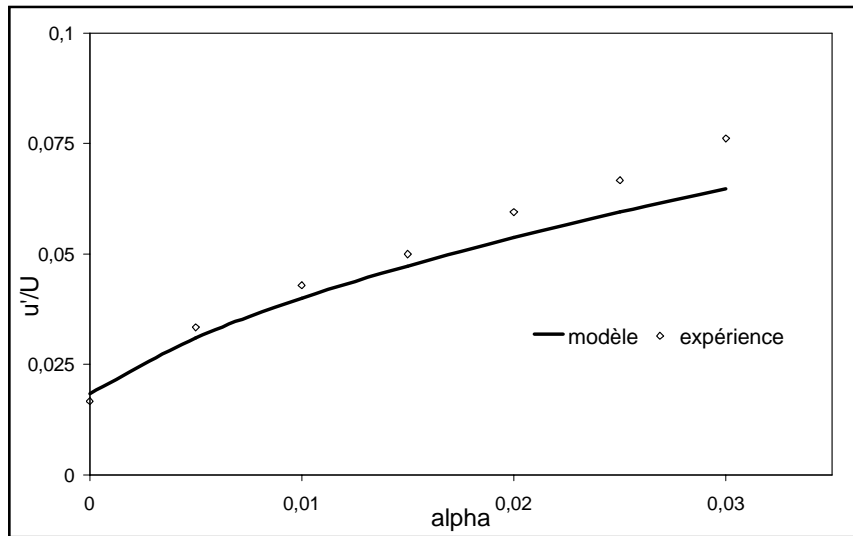


Figure (3-2) : Intensité turbulente $\sqrt{u'^2}/U$ en fonction du taux de vide α pour différentes valeurs de la vitesse moyenne. Comparaison des résultats des deux modèles avec les données expérimentales à $X/M = 36.4$ de Lance et Bataille (1991).

Ces expériences suggèrent que l'effet des bulles sur la turbulence du liquide est d'autant plus grand que la pseudo-turbulence est importante vis-à-vis de la turbulence engendrée par la grille.

La différence entre l'écart type des fluctuations de vitesse transversale et verticale évaluée expérimentalement par Lance et Bataille (1991) reste de même ordre de grandeur que l'incertitude de mesure (de l'ordre de 10%) et les composantes non diagonales du tenseur de Reynolds sont négligeables, ce qui a mené ces auteurs à déduire que la présence des bulles n'altère pas l'isotropie initiale de l'écoulement monophasique. Ce n'est que dans des expériences ultérieures (Mareuge et Lance, 1995) qu'on a mis en évidence le caractère anisotrope de la pseudo-turbulence, dans lesquelles on mesure les fluctuations turbulentes induites par la montée de bulles dans un liquide au repos (voir figure (2-26) dans le paragraphe 2.3.2.2 au chapitre 2). Les résultats obtenus indiquent que le rapport entre l'écart type des fluctuations de vitesse transversale et verticale est de l'ordre de 0.8

La figure (3-3) montre que les résultats numériques indiquent une anisotropie en écoulement diphasique, anisotropie due au modèle de pseudo-turbulence et qui tend à augmenter avec le taux de vide.

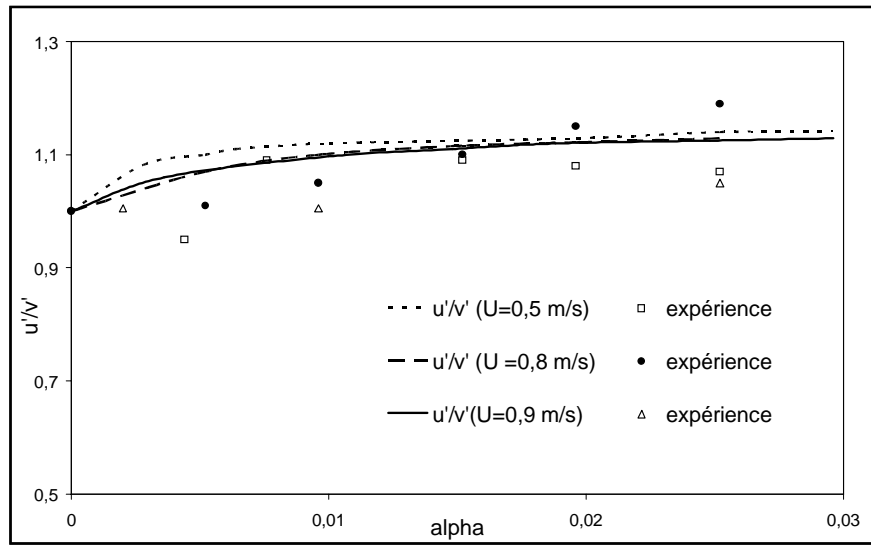


Figure (3-3) : Evolution du rapport des composantes normales du tenseur de Reynolds en fonction du taux de vide pour différentes valeurs de la vitesse moyenne. Comparaison des résultats des deux modèles à $X/M = 36.4$ avec les données expérimentales de Lance et Bataille (1991).

3.4.3 Turbulence homogène avec cisaillement uniforme

Pour les deux modèles, on procède comme pour l'écoulement homogène de grille par la simulation du cas monophasique en ajustant des valeurs de l'énergie turbulente et, d'une part du taux de dissipation pour le modèle $k-\varepsilon$, d'autre part de la fréquence caractéristique ω_0 pour le modèle $k-\omega_0$, à l'entrée de l'écoulement afin de reproduire les mesures expérimentales relatives à ce dernier. Les bulles sont également injectées au droit de la grille sans vitesse de glissement et la turbulence à cet endroit est supposée être celle du cas monophasique.

3.4.3.1 Résultats numériques obtenus par le modèle $k-\varepsilon$

La figure (3-4) montre le meilleur ajustement qui reproduit l'écoulement monophasique. Les figures (3-5), (3-6) et (3-7) témoignent aussi d'un accord satisfaisant entre simulations et observations dans trois cas d'écoulements à bulles uniformément cisailés. Le modèle rend bien compte des différences observées par rapport au cisaillement uniforme monophasique. Il prédit bien notamment l'augmentation de l'isotropie dans les écoulements à bulles qui se traduit d'une part par

la diminution de la différence entre les composantes normales du tenseur de Reynolds et une atténuation de la contrainte de cisaillement.

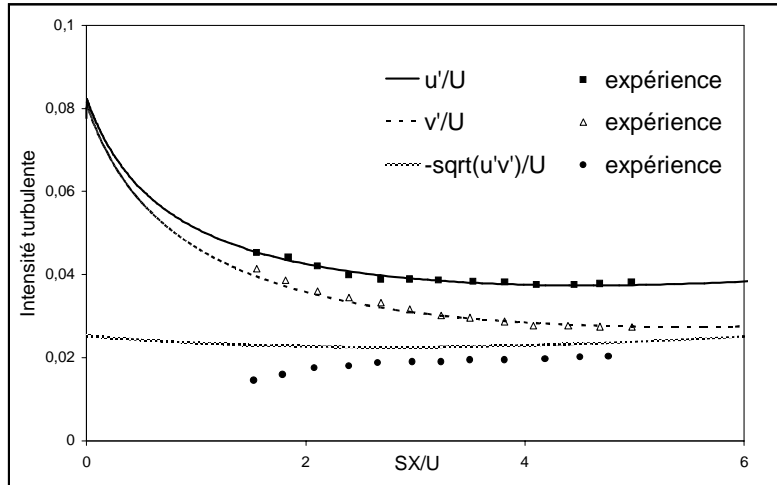


Figure (3-4) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement monophasique uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \epsilon$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 0 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

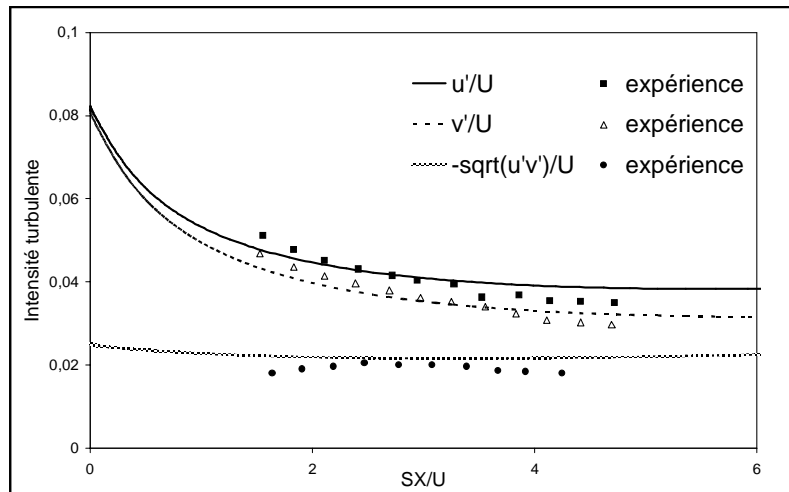


Figure (3-5) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \epsilon$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

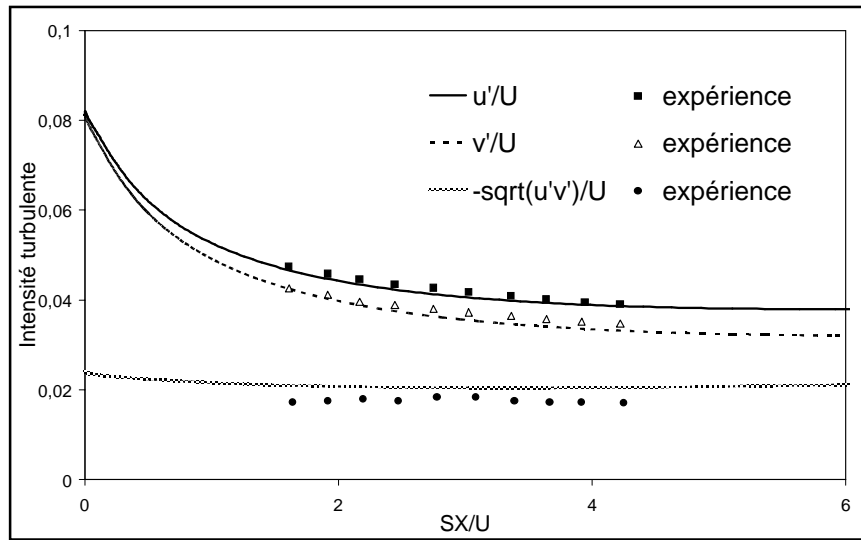


Figure (3-6) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \epsilon$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1.4 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

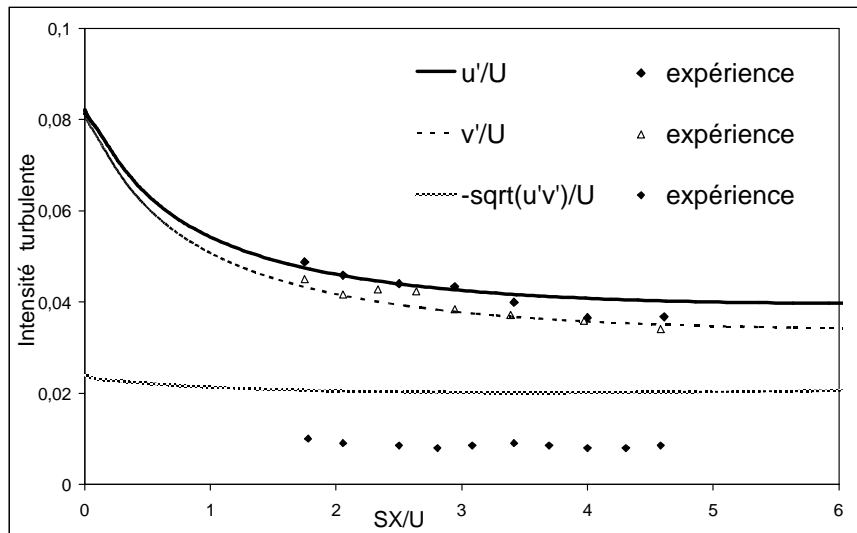


Figure (3-7) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \epsilon$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 2 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

Ce comportement est bien mis en évidence en comparant la figure (3-8), relative à l'écoulement monophasique, qui présente l'évolution le long de la conduite des composantes du tenseur de

Reynolds normalisées par l'énergie turbulente, aux figures (3-9), (3-10) et (3-11) relatives au cas diphasique pour différents taux de vide.

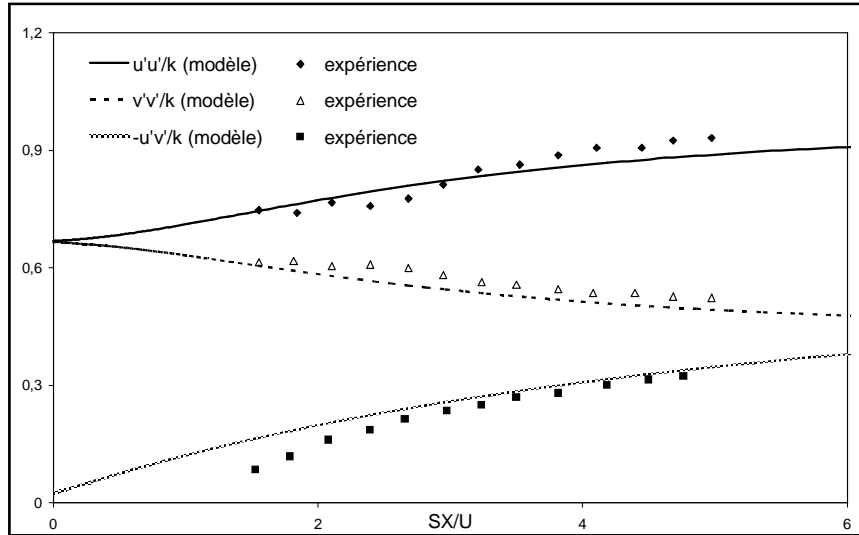


Figure (3-8) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds normalisées par l'énergie turbulente k dans le cas monophasique. Comparaison avec les données expérimentales de Lance et al (1991) ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 0 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$).

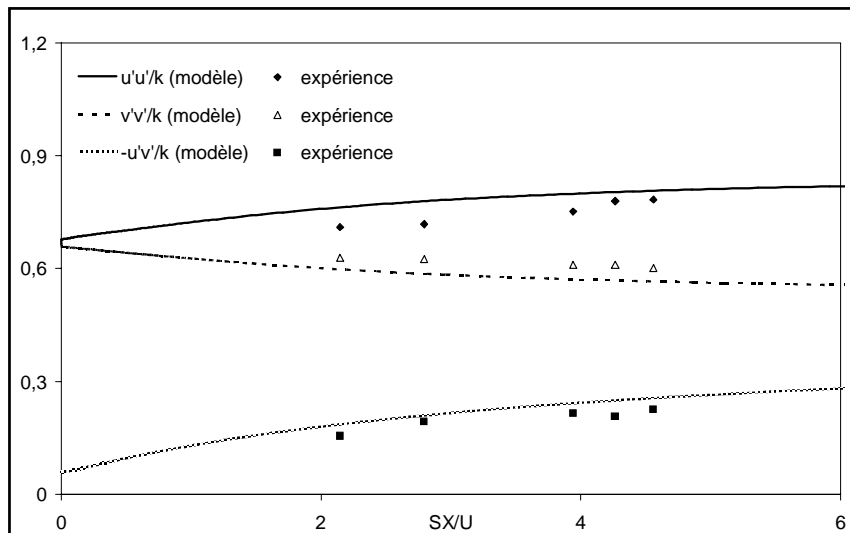


Figure (3-9) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds normalisées par l'énergie turbulente k dans le cas d'écoulement à bulles. Comparaison avec les mesures expérimentales de Lance et al (1991) ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$).

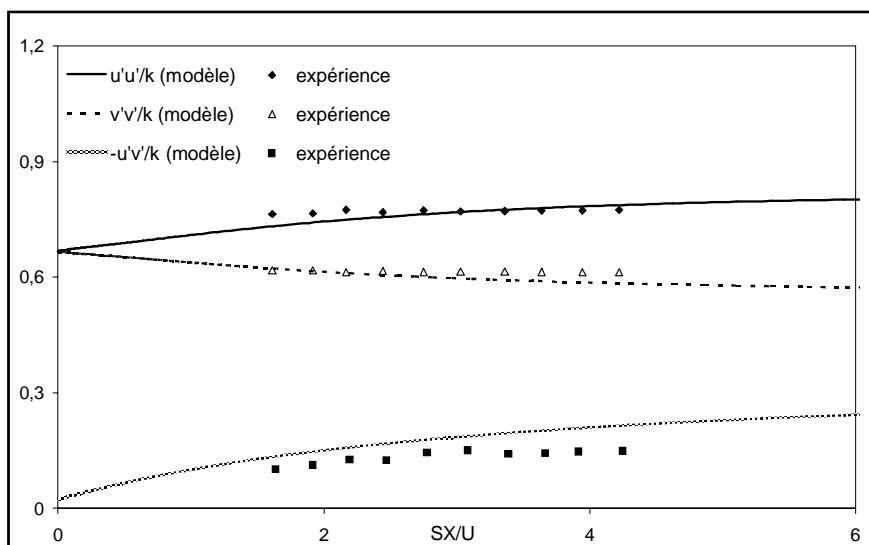


Figure (3-10) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds normalisées par l'énergie turbulente k dans le cas d'écoulement à bulles. Comparaison avec les mesures expérimentales de Lance et al (1991) ($U= 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1.4 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$).

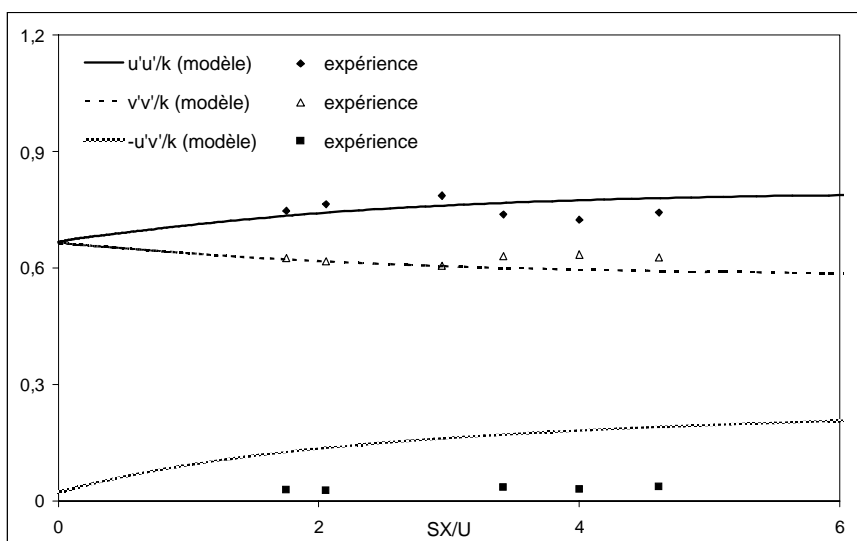


Figure (3-11) : Evolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds normalisées par l'énergie turbulente k dans le cas d'écoulement à bulles. Comparaison avec les mesures expérimentales de Lance et al [4] ($U= 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 2 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$).

3.4.3.2 Résultats numériques obtenus par le modèle $k - \omega$

On retrouve des résultats similaires avec le modèle $k - \omega$ (Bellalhal et al 2004 b). La figure (3-12) montre le meilleur ajustement de la fréquence ω_0 qui a reproduit le cas monophasique.

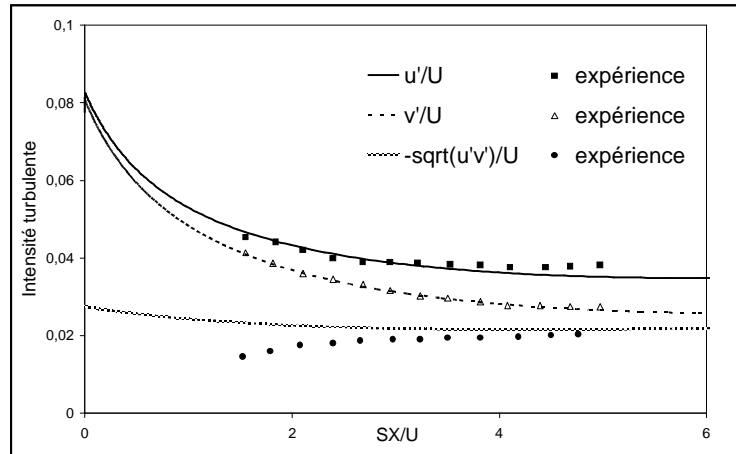


Figure (3-12) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement monophasique uniformément cisaillé. Comparaison des résultats du modèle $k - \omega$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 0 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

Les figures (3-13) – (3-15), semblables aux figures (3-5) – (3-7), présentent l'évolution longitudinale des composantes du tenseur de Reynolds reproduite par le modèle $k - \omega$ pour les trois taux de vide de 1 %, 1.4 % et 2 %.

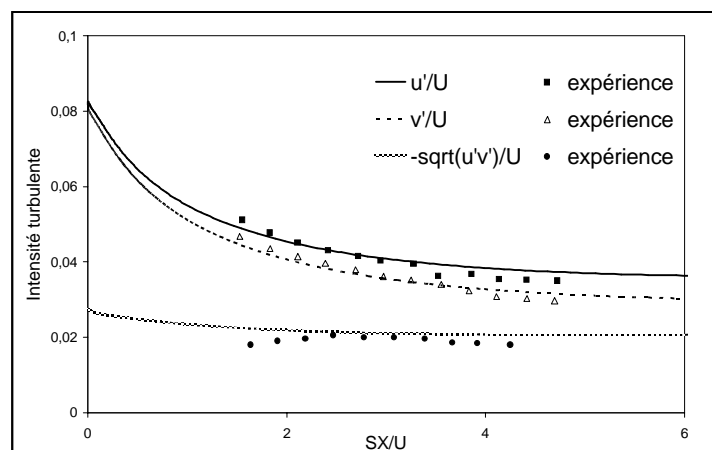


Figure (3-13) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisaillé. Comparaison des résultats du modèle $k - \omega$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

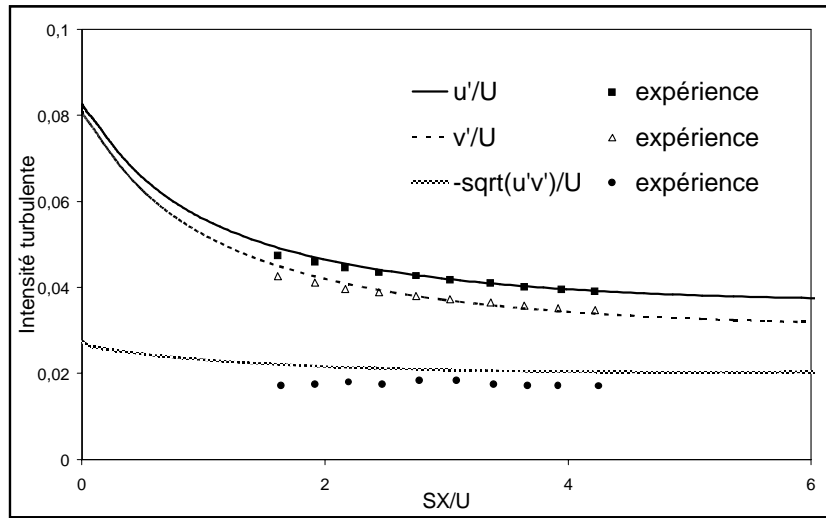


Figure (3-14) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \omega$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 1.4 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

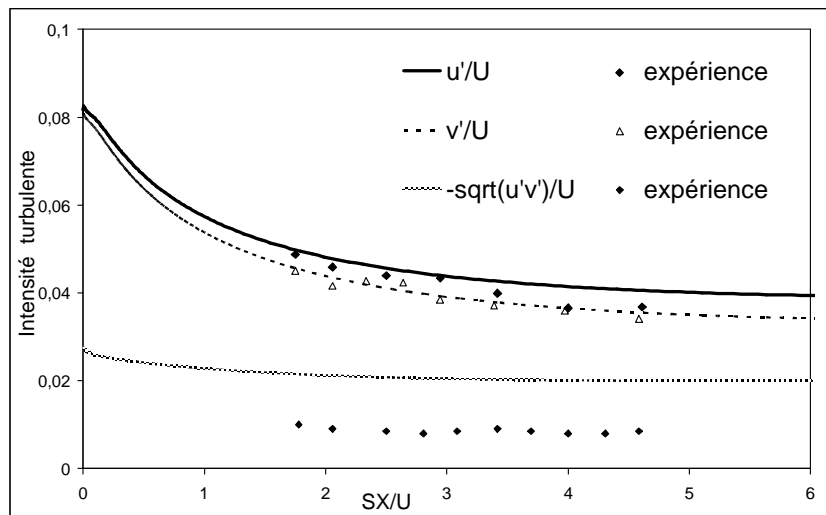


Figure (3-15) : Composantes du tenseur de Reynolds en écoulement à bulles uniformément cisailé. Comparaison des résultats du modèle $k - \omega$ avec les données expérimentales de Lance et al (1991), ($U = 1. \text{ m/s}$, $\alpha = 2 \%$, $S = 2.9 \text{ s}^{-1}$)

3.5 Conclusions

La réduction des fermetures au second ordre de la turbulence en écoulement à bulles conduit à définir une viscosité turbulente qui permet de capter au premier ordre l'effet des interactions interfaciales sur le mécanisme d'étirement tourbillonnaire pris en compte au niveau de la modélisation de la turbulence au second ordre. Deux modèles de turbulence au premier ordre ont été développés sur la base de cette formulation de la viscosité turbulente. Ces modèles à trois équations de transport ($k_0 - k_s - \varepsilon$) et ($k_0 - k_s - \omega$) ont été mis en œuvre dans le cas de deux écoulements à bulles homogènes verticaux : uniforme de grille et à cisaillement constant. Les résultats numériques des simulations ont été confrontés aux données expérimentales de Lance et Bataille (1991) et de Lance et al (1991).

La comparaison de l'évolution de la turbulence derrière une grille en écoulement monophasique et diphasique permet de tester la validité de l'hypothèse de décomposition de la turbulence en écoulement diphasique à taux de vide modéré en contributions turbulente et pseudo-turbulente. L'adjonction d'un gradient de vitesse constant engendre une production de la turbulence dans la phase continue par cisaillement et permet ainsi de tester la capacité de la modélisation de la viscosité turbulente proposée et qui rend compte de l'influence de la présence de la phase dispersée sur les mécanismes de la turbulence de la phase continue.

Les principales conclusions de ces simulations peuvent être résumées ainsi :

- Les simulations de l'écoulement homogène de grille montrent que la turbulence en écoulement à bulles à taux de vide modéré peut être représentée comme la superposition d'une turbulence monophasique et d'une pseudo-turbulence. Les résultats numériques montrent qu'une anisotropie apparaît dans les écoulements à bulles, qui semble être vérifiée par les résultats expérimentaux.
- Les simulations de l'écoulement homogène à bulles à cisaillement constant ont reproduit la diminution du frottement turbulent ainsi que la tendance à l'isotropie, induites par la présence des bulles qui sont observées expérimentalement. Le modèle produit en effet des valeurs de la viscosité turbulente plus faibles qu'en écoulement monophasique de sorte que ces comportements sont bien reproduits. L'ensemble de ces résultats tend à conforter le bien fondé de la modélisation de la viscosité turbulente diphasique qui met en évidence la compétition entre les mécanismes de la

turbulence et de la pseudo-turbulence à travers les rapports des énergies turbulente et pseudo-turbulente et des échelles caractéristiques des temps qui leur sont associées.

Chapitre 4 : Couches cisillées minces

2-D en écoulement à bulles

4.1 Introduction

Nous avons développé, dans le chapitre 3 des modèles de turbulence au premier ordre ($k-\varepsilon$ et $k-\omega$) pour les écoulements homogènes à bulles à faibles taux de vide. Ces modèles ont été déduits par réduction des fermetures au second ordre ; en particulier cette réduction a permis d'obtenir une formulation originale de la viscosité turbulente diphasique qui conserve, à travers les échelles quelle met en jeu, l'aptitude de cette formulation à rendre compte des effets de la turbulence et de la pseudo-turbulence sur le frottement turbulent. L'application de ces modèles de turbulence dans deux cas d'écoulements homogènes à bulles (uniforme et à cisaillement constant) a montré une concordance satisfaisante avec les observations expérimentales. Les modèles ont reproduit, en particulier dans le cas de la turbulence homogène à cisaillement constant, la réduction du frottement turbulent et de l'anisotropie de l'écoulement observée expérimentalement.

L'étude de la turbulence homogène permet d'éviter les difficultés liées d'une part à la répartition des phases puisque le taux de répartition des phases est uniformément distribué et d'autre part à la modification du champ de la vitesse moyenne dans le liquide par rétroaction des fluctuations turbulentes qui comprend, en écoulement à bulles, celles induites par l'effet des interactions interfaciales. Nous nous proposons dans ce chapitre d'appliquer le modèle à deux fluides avec fermeture au premier ordre de la turbulence aux écoulements inhomogènes à faibles taux de vide. Le modèle à deux fluides sera mis en œuvre dans la simulation d'un écoulement diphasique bidimensionnel turbulent de couche cisillée mince (le sillage vertical à bulles) pour lequel on dispose de données expérimentales complètes (Roig 1993). Cet écoulement a par ailleurs fait l'objet d'analyse à l'aide d'un modèle à deux fluides avec fermeture au second ordre de la turbulence (Chahed et al 2002).

Après avoir rappelé les équations dynamiques, les fermetures du terme de transfert interfacial de quantité de mouvement et les équations du modèle de turbulence, nous présentons les applications numériques et les résultats des simulations du sillage à bulles. Ces résultats seront commentés vis-à-vis du comportement auto-préservatif du sillage à bulles et des propriétés qui en découlent.

4.2 Modèles eulériens à deux fluides

4.2.1 Equations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement

Les équations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement dans les deux modèles eulériens s'écrivent :

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_1 \overline{u_{1j}}) = 0 \quad (4-1)$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_2 \overline{u_{2j}}) = 0 \quad (4-2)$$

$$\rho_1 \alpha_1 \frac{D \overline{u_{1i}}}{Dt} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\sigma_{ij}} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_1 \overline{u'_{1i} u'_{1j}}] + \rho_L (1 - \alpha) g_i + M_{1i} \quad (4-3)$$

$$\rho_2 \alpha_2 \frac{d \overline{u_{2i}}}{dt} = \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\sigma_{ij}} - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha_2 \overline{u'_{2i} u'_{2j}}] + \rho_2 \alpha_2 g_i + M_{2i} \quad (4-4)$$

On désigne par l'indice "1" la phase continue et par l'indice "2" la phase dispersée. Les dérivées

particulières $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_{1i}} \frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \overline{u_{2i}} \frac{\partial}{\partial x_i}$ désignent les opérateurs de dérivées en

suivant respectivement le mouvement moyen du liquide et du gaz. Le tenseur σ_{ij} correspond au tenseur des contraintes dans le liquide. En adoptant l'approche fondée sur la notion de densité locale de force (voir paragraphe 1.3.3.3 au chapitre 1), les termes interfaciaux de transfert de quantité de mouvement qui figurent dans ces bilans sont donnés par la relation :

$$M_{2i} = -M_{1i} = \langle \chi_2 \frac{\partial \sigma'_{ij(0)}}{\partial x_j} \rangle + \langle \chi_2 f_{pi}^{(1)} \rangle \quad (4-5)$$

où $\sigma'_{ij(0)}$ est la composante fluctuante du tenseur des contraintes exercées par l'écoulement non perturbé et $f_{pi}^{(1)}$ est la densité volumique de la contribution de l'écoulement perturbé à la force instantanée exercée par le liquide sur la phase dispersée.

4.2.2 Fermetures du modèle à deux fluides : Modèle ENIT avec fermeture au premier ordre de la turbulence

Nous désignons dans ce paragraphe la phase gaz dispersée correspondant aux bulles par l'indice G et la phase liquide par l'indice L.

4.2.2.1 Modélisation du terme interfacial

Le terme interfacial adopté dans ce modèle s'écrit $M_{Gi} = \langle \chi_G f_{pi}^{(1)} \rangle$ où $f_{pi}^{(1)}$ est donnée par la relation suivante :

$$f_{pi}^{(1)} = \frac{1}{v_B} \iint_{\partial v_B} \sigma_{ij}^{(1)} n_j ds = \frac{\overline{\partial \sigma_{ij}^{(1)}}_{v_B}}{\partial x_j} \quad (4-6)$$

avec $\sigma_{ij}^{(1)}$ est le tenseur des contraintes associé à l'écoulement perturbé, v_B et ∂v_B désignent respectivement le volume et la surface d'une bulle et $\overline{\quad}_{v_B}$ est un opérateur de moyenne volumique sur le volume d'une bulle. La densité $f_{pi}^{(1)}$ comprend les contributions des forces de traînée, de masse ajoutée et de portance. Son expression lagrangienne retenue s'écrit comme suit (Rivero et al 1991) :

$$f_{pi}^{(1)} = -\frac{3}{4} \rho_L \frac{C_D}{d} \|u_{Gi} - u_{Li}^{(0)}\| (u_{Gi} - u_{Li}^{(0)}) - C_A \rho_L \left(\frac{\tilde{d}}{dt} u_{Gi} - \frac{\tilde{D}}{Dt} u_{Li}^{(0)} \right) - 2\rho_L C_L \omega_{Lij}^{(0)} \times (u_{Gj} - u_{Lj}^{(0)}) \quad (4-7)$$

avec les dérivées particulières $\frac{\tilde{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{Lj} \frac{\partial}{\partial x_j}$ et $\frac{\tilde{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{Gj} \frac{\partial}{\partial x_j}$. Dans cette expression, les champs de vitesse $\mathbf{u}_{Li}^{(0)}$ et de vorticité $\omega_{Lij}^{(0)}$ correspondent à l'écoulement non perturbé, d est le diamètre des bulles et $(C_D ; C_L ; C_A)$ sont respectivement les coefficients de traînée, de masse ajoutée et de portance.

La modélisation du terme interfacial M_{Gi} introduit plusieurs difficultés liées notamment à la prise de moyenne des termes non-linéaires de traînée, de masse ajoutée et de portance. La démarche commune adoptée dans la modélisation de ce terme consiste à ne retenir que les contributions des termes moyens (Lee et al 1989) ou éventuellement à exprimer les effets non-linéaires par un terme supplémentaire de dispersion proportionnel au gradient du taux de vide (Lopez de Bertodano et al (1990, 1994), Simonin (1990)). En effet, le terme de corrélations des fluctuations de la vitesse de glissement issu de la traînée peut être pris en compte par une éventuelle correction du coefficient moyen de traînée et le terme de corrélations des fluctuations de la vitesse de glissement et de la vorticité issu de la force de portance peut être négligé (Bel Fdhila et Simonin 1992). D'un autre côté, dans un travail plus récent (Chahed et al. 2002), les auteurs ont mis en évidence le grand effet des termes de corrélations des fluctuations de vitesses dans le liquide et dans le gaz issus des termes non linéaires de la masse ajoutée.

Nous retenons dans ce travail, en suivant en cela Chahed et al (2002), la formulation suivante du terme interfacial de transfert de quantité de mouvement qui inclue les contributions des champs moyens dans les forces de traînée et de portance ainsi que les contributions des champs moyen et turbulent dans la force de masse ajoutée:

$$M_{Gi} = -\frac{3}{4} \alpha \rho_L \frac{C_D}{d} \left\| \overline{\mathbf{u}_R} \right\| \overline{\mathbf{u}_{Ri}} - 2 \alpha \rho_L C_L \overline{\omega_{Lij}} \times \overline{\mathbf{u}_{Rj}} - \alpha \rho_L C_A \left(\frac{d}{dt} \overline{\mathbf{u}_{Gi}} - \frac{D}{Dt} \overline{\mathbf{u}_{Li}} \right) - \rho_L C_A \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha (\overline{u'_{Gi} u'_{Gj}} - \overline{u'_{Li} u'_{Lj}})] \quad (4-8)$$

avec α est le taux de présence de la phase gaz (en omettant l'indice G) et $\overline{\mathbf{u}_{Ri}}$ est la vitesse relative donnée par la relation $\overline{\mathbf{u}_{Ri}} = \overline{\mathbf{u}_{Gi}} - \overline{\mathbf{u}_{Li}}$. Nous remarquons que dans cette modélisation l'écoulement non perturbé est identifié à l'écoulement dans la phase liquide.

4.2.2.2 Modélisation de la turbulence dans le liquide : modèles de turbulence à trois équations

La turbulence de la phase continue est décrite par le modèle de turbulence au premier ordre ($k_0 - k_s - \varepsilon$) à trois équations développé dans le chapitre 3. Nous rappelons ici ses équations qui s'écrivent sous leurs formes générales :

$$\frac{D}{Dt} k_0 = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial k_0}{\partial x_j}] + v_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}) - \varepsilon_0 \quad (4-9)$$

$$\frac{D}{Dt} k_s = \frac{C_{sk}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial k_s}{\partial x_j}] + \frac{1}{4} \frac{D}{Dt} \alpha \left\| \bar{u}_R \right\|^2 \quad (4-10)$$

$$\frac{D}{Dt} \varepsilon_0 = \frac{C_{\varepsilon}}{(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x_j} [(1-\alpha)(\tau_t k_0 + \tau_b k_s) \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial x_j}] + \frac{\varepsilon_0}{k_0} \left[C_{1\varepsilon} v_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}) - C_{2\varepsilon} \varepsilon_0 \right] \quad (4-11)$$

avec la formulation de la viscosité turbulente :

$$v_t = C_\mu \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} = v_{t0} \frac{(1 + \frac{k_s}{k_0})}{(1 + \alpha \frac{\tau_t}{\tau_b})} \quad \text{avec} \quad C_\mu = 0.09 \quad (4-12)$$

Nous notons enfin que le tenseur de Reynolds est calculé dans ce modèle à l'aide de la fermeture de Boussinesq qui s'écrit dans ce cas :

$$\overline{u'_{Li} u'_{Lj}} = \overline{u'_{Li} u'_{Lj}}^{(T)} + \overline{u'_{Li} u'_{Lj}}^{(S)} = -v_t (\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}) + \frac{2}{3} (k_0 + k_s) \delta_{ij} \quad (4-13)$$

4.2.2.3 Turbulence de la phase dispersée

Le tenseur de Reynolds dans la phase dispersée correspond au tenseur de la double corrélation des fluctuations des vitesses des barycentres des bulles (l'écoulement au sein des bulles est négligé). La fermeture retenue de ce tenseur de Reynolds dans le modèle à deux fluides développé ici est celle proposée par Chahed et al (2002). Elle repose sur les résultats de la théorie de dispersion de

Tchen en turbulence homogène (Hinze 1975) en prenant notamment en compte les inhomogénéités et les effets de croisement des trajectoires (Csanady 1963). Si on note u et v les composantes longitudinale (selon la direction verticale x) et transversale (direction y) de la vitesse, les tensions de Reynolds du gaz sont exprimées en fonction de celles de la phase continue sous la forme :

$$\overline{u'_G u'_G} = C_{11} \overline{u'_L u'_L} \quad ; \quad \overline{v'_G v'_G} = C_{22} \overline{v'_L v'_L} \quad ; \quad \overline{u'_G v'_G} = C_{12} \overline{u'_L v'_L} \quad (4-14)$$

Les coefficients C_{11} , C_{22} et C_{12} sont formulés conformément à la théorie de dispersion de Tchen-Hinze en turbulence homogène par selon les relations suivantes :

$$C_{11} = C_{22} = C_T \frac{b^2 + \tau_r}{1 + \tau_r} \quad \text{avec} \quad b = \frac{1 + C_A}{\frac{\rho_G}{\rho} + C_A} \approx \frac{1 + C_A}{C_A} \quad ; \quad \tau_r = \frac{\tau_t}{\tau_p} \quad \text{et} \quad \tau_p = \frac{\frac{\rho_G}{\rho} + C_A}{\frac{3}{4} \frac{C_D}{d} |u_R|} \quad (4-15)$$

C_T est une constante introduite pour tenir compte des pertes de corrélation susceptible de se produire à cause d'une déformation des bulles ou de l'effet de croisement de trajectoire.

La composante non diagonale est modélisée à l'aide du concept de la viscosité turbulente. En identifiant les gradients des vitesses des deux phases, les composantes non diagonales du tenseur de Reynolds dans le liquide et dans le gaz sont reliées selon l'expression suivante :

$$\frac{\overline{u'_G v'_G}}{\overline{u'_L v'_L}} = \frac{v_{tG}}{v_t} \quad (4-16)$$

où v_{tG} est la viscosité turbulente du gaz. Csanady et al (1963) exprime cette viscosité en fonction de celle du liquide en tenant compte de l'effet de croisement des trajectoires selon le modèle suivant :

$$\frac{v_{tG}}{v_t} = C_{12} = \frac{C_v}{\sqrt{1 + C_\beta \xi^2}} \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{|u_R|}{\sqrt{\frac{2k_0}{3}}} \quad \text{et} \quad C_\beta = 0.45 \quad (4-17)$$

4.2.3 Version initiale du code MELODIF

4.2.3.1 Présentation du code MELODIF

Le code de calcul "MELODIF" est un code semi-industriel développé par le Groupe de Mécanique des Fluides Industrielle du Laboratoire National d'Hydraulique d'Electricité de France. C'est un code bidimensionnel diphasique eulérien-eulérien consacré à la simulation des écoulements à inclusions dispersées, au sein desquels peuvent se produire au niveau des interfaces des phénomènes de transfert thermiques, de masse ou de quantité de mouvement. Des équations séparées de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'enthalpie sont formulées pour chacune des phases couplées à travers les termes de transferts interfaciaux (Thai Van et al 1994).

4.2.3.2 Mise en oeuvre numérique

Le code MELODIF utilise une combinaison des méthodes de différences finies – volumes finis basée sur un processus de type pas fractionnaire (Thai Van et al 1994). Cette méthode consiste à la résolution de l'équation d'évolution en plusieurs étapes séparées correspondant chacune à une équation élémentaire. Des différentes méthodes numériques adaptées sont utilisées pour chacune des étapes en fonction de la nature des équations à résoudre. Les différentes étapes de calcul sont résumées dans la figure (4-1) :

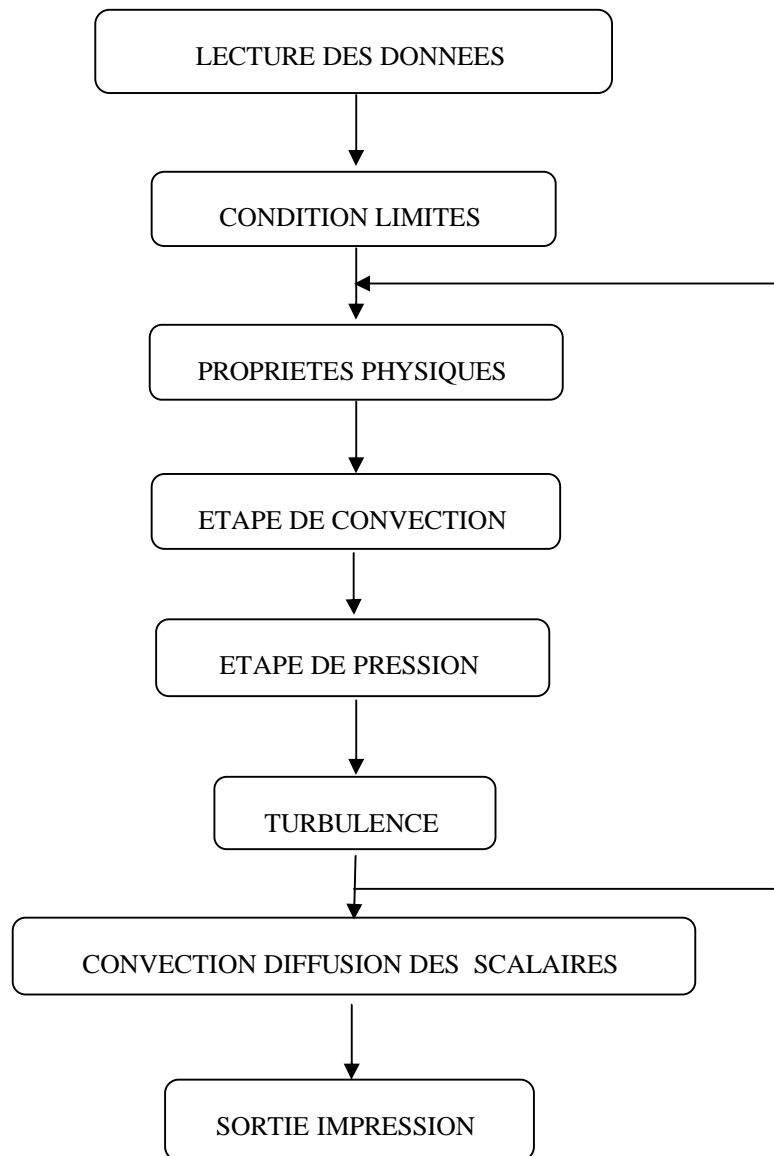


Figure (4-1) : étapes d'intégration de MELODIF

La discrétisation des équations est de type volumes finis, elle définit une grille dite de vitesse où sont calculés les composantes des vitesses moyennes et les grandeurs turbulentes. Afin d'assurer la validité de la discrétisation des équations de bilan de masse dans les deux phases, la pression et le taux de vide sont calculés au centre de chaque élément de volume. Une nouvelle grille appelée "grille de pression" décalée par rapport à la première est ainsi définie (voir figure (4-2)) :

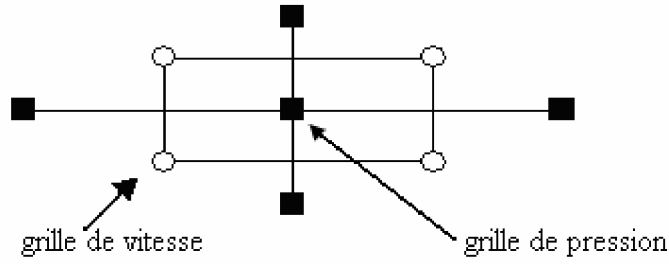


Figure (4-2) : Grilles de vitesse et de pression décalées

4.2.3.3 Modélisation du terme interfacial

Le premier terme du second membre représente une corrélation entre la fonction de présence de la phase dispersée et les fluctuations du tenseur des contraintes de l'écoulement non perturbé. Ce terme qui participe à la dispersion des bulles est modélisé par Simonin et Viollet (1990) comme suit :

$$\langle \chi_2 \frac{\partial \sigma'_{lij}(0)}{\partial x_j} \rangle = \rho_1 \overline{u'_{li} u'_{2j}} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_j} \quad (4-18)$$

Quant au second terme associé à la contribution de l'écoulement perturbé, il est modélisé par :

$$\begin{aligned} \langle \chi_2 f_{pi}^{(1)} \rangle = & -\alpha_2 \rho_1 F_D \overline{u_{Ri}} - \rho_1 C_A \alpha_2 \left[\frac{\partial \overline{u_{Ri}}}{\partial t} + \overline{u_{2j}} \frac{\partial \overline{u_{2i}}}{\partial x_j} \right] - 2\alpha \rho_L C_L \overline{\omega_{Lij}} \times \overline{u_{Rj}} \\ & - \rho_1 C_A \frac{\partial}{\partial x_j} [\alpha (\overline{u'_{2i} u'_{2j}} - \overline{u'_{li} u'_{2j}})] \end{aligned} \quad (4-19)$$

La vitesse relative qui intervient dans cette modélisation est donnée par la relation suivante :

$$\alpha_2 \overline{u_{Ri}} = (\overline{u_{2i}} - \overline{u_{li}}) - \langle \chi_2 u'_{li}(0) \rangle \quad (4-20)$$

où le dernier terme du second membre représente la vitesse de drift qui traduit d'un point de vue physique une corrélation entre la fonction de présence de la phase dispersée et les fluctuations du champ non perturbé. En effet, cette expression est déduite par la prise de la moyenne de la vitesse relative instantanée qui s'écrit :

$$\chi_2 u_{Ri} = \chi_2 (u_{2i} - u_{li}^{(0)}) \quad (4-21)$$

Ce terme de drift est modélisé par Simonin (1990) selon la formulation suivante :

$$\overline{\overline{u_{di}}} = \langle \chi_2 u_{li}^{(0)} \rangle = -D_{12}^t \left[\frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_i} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_i} \right] \quad (4-22)$$

avec :

$D_{12}^t = \tau_{12}^t \overline{\overline{u'_{li} u'_{2i}}}$ et τ_{12}^t est un temps caractéristique du transit d'une particule dans un tourbillon donné par (4-30).

4.2.3.4 Modélisation de la turbulence

Le modèle eulérien avec les termes interfaciaux de transfert de quantité de mouvement ainsi formulé nécessite une fermeture du tenseur de Reynolds dans le liquide et dans le gaz ainsi que du tenseur de double corrélation binaire fluide-inclusions $\overline{\overline{u'_{li} u'_{2j}}}$. Cette fermeture est réalisée à l'aide du concept de la viscosité turbulente selon la relation de Boussinesq qui s'écrit :

$$\overline{\overline{u'_{ki} u'_{kj}}} = -v_k^t \left[\frac{\partial \overline{u_{ki}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_{kj}}}{\partial x_i} \right] + \frac{2}{3} [k_k + v_k^t \frac{\partial \overline{u_{kl}}}{\partial x_l}] \delta_{ij} \quad \text{pour } k = 1 ; 2 \quad (4-23)$$

$$\overline{\overline{u'_{li} u'_{2j}}} = -v_{12}^t \left[\frac{\partial \overline{u_{2i}}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_{1j}}}{\partial x_i} \right] + \frac{1}{3} [k_{12} + v_{12}^t (\frac{\partial \overline{u_{2l}}}{\partial x_l} + \frac{\partial \overline{u_{1l}}}{\partial x_l})] \delta_{ij} \quad (4-24)$$

où k_k désigne les énergies turbulentes dans la phase continue ($k = 1$) et dispersée ($k = 2$). Les viscosités turbulentes sont données en fonction des échelles caractéristiques de l'écoulement par les relations suivantes :

$$v_1^t = \frac{2}{3} k_1 \tau_1 \quad (4-25)$$

$$v_2^t = (1+b)v_{12}^t - bv_1^t + (1-b) \frac{\tau_{12}^F}{2} (\frac{2}{3} k_2 - \frac{b}{3} k_{12}) \quad (4-26)$$

$$v_{12}^t = \sigma_\alpha D_{12}^t \quad \text{où } \sigma_\alpha \text{ est un nombre de Schmidt} \quad (4-27)$$

Ces échelles sont exprimées comme suit :

- Echelle de temps caractéristique de la turbulence dans la phase continue :

$$\tau_1 = \frac{3}{2} c_\mu \frac{k_1}{\varepsilon} \quad (4-28)$$

- Echelle de longueur caractéristique de la taille des grandes structures turbulentes :

$$L_1 = \tau_1 \sqrt{\frac{2}{3} k_1} \quad (4-29)$$

- Echelle de temps caractéristique du transit d'une particule dans un tourbillon :

$$\tau_{12}^t = \frac{L_1}{\overline{|\mathbf{u}_R|}} \quad (4-30)$$

- Echelle de temps caractéristique de l'entraînement des inclusions par le fluide environnant :

$$\tau_{12}^F = \frac{1}{F_D} \left[\frac{\rho_1}{\rho_2} + C_A \right] \quad (4-31)$$

- Echelle de temps caractéristique de l'interaction particule-turbulence du liquide :

$$\tau_{12}^t = \frac{\tau_1^t}{\sqrt{1 + c_\beta \psi_r^2}} \quad (4-32)$$

Où $\psi_r = \frac{\overline{|\mathbf{u}_R|}}{\sqrt{\frac{2}{3} k_1}}$ est un paramètre lié aux effets d'inertie qui agissent sur la particule.

La turbulence de la phase continue est prédite dans le code MELODIF à l'aide du modèle de turbulence de Simonin (1991). C'est un modèle au premier ordre k-ε diphasique appartenant à la classe des modèles à une échelle de temps (voir paragraphe 2.3.1.1 au chapitre 2). Tandis que l'énergie turbulente de la phase dispersée k_2 et la covariance des mouvements fluctuants $k_{12} = \overline{u'_{1i} u'_{2i}}$ sont déduites à partir des caractéristiques de la turbulence de la phase continue et des échelles caractéristiques des interactions entre mouvements fluctuants en se basant sur la théorie de dispersion de Tchen (1947). Ces deux énergies sont données par :

$$k_2 = k_1 \left[\frac{b^2 + \eta_r}{1 + \eta_r} \right] \quad (4-33)$$

$$k_{12} = 2k_1 \left[\frac{b^2 + \eta_r}{1 + \eta_r} \right] \quad (4-34)$$

$$\text{avec } \eta_r = \frac{\tau_1^t}{\tau_{12}^t} \text{ et } b = \frac{1 + C_A}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_A}.$$

4.2.4 Version modifiée du code MELODIF

La modification de la version initiale du code MELODIF porte sur la modélisation du terme interfacial de transfert de quantité de mouvement ainsi que sur la modélisation de la turbulence. La modélisation du terme interfacial se base entre autres sur une formulation de la force de la masse ajoutée faisant intervenir pour les deux opérateurs de dérivée agissant seule la dérivée matérielle suivant la phase gazeuse ce qui n'était pas confirmé par les travaux de Rivero (1991). On peut se demander sur les implications du remplacement de la dérivée matérielle du liquide par celle du gaz dans l'expression de la force de masse ajoutée notamment en ce qui concerne les corrélations des fluctuations turbulentes qui en découlent. La dérivée matérielle suivant la phase gazeuse appliquée à une grandeur de la phase continue donne lieu à des inter-corrélations entre des fluctuations dans le liquide et des fluctuations dans le gaz, moins évidentes du point de vue de la description statistique classique de la turbulence. Ces corrélations, comme les corrélations dans le gaz, sont exprimées en fonction des corrélations dans le liquide à l'aide de modèles développés sur la base de la théorie de Tchen-Hinze de sorte que le problème de fermeture de la turbulence de l'écoulement diphasique se réduise à la seule modélisation du tenseur de Reynolds de la phase continue.

D'autre part, la version initiale du code MELODIF ignore la pseudo-turbulence, l'introduction de cette notion est assurée par la définition d'une variable correspondant à l'énergie pseudo-turbulente qui sera décrite par une équation de transport (équation (4-10)) ainsi que l'implantation de la formulation (4-12) de la viscosité turbulente. La nouvelle formulation du modèle à deux fluides ne fait intervenir que les corrélations doubles des fluctuations de vitesses dans le liquide et dans le gaz.

Les tensions de reynolds dans le gaz seront exprimées en fonction du tenseur de Reynolds dans le liquide conformément aux relations (4-14) – (4-17).

4.3 Résultats et interprétations

4.3.1 Remarques préliminaires

Les deux versions du code MELODIF présentées plus haut (version initiale et version modifiée) sont appliquées à la simulation du sillage à bulles et les résultats des simulations sont confrontés aux résultats expérimentaux de Roig (1993). Rappelons à cet effet que la version modifiée correspond en fait à une implantation des fermetures du modèle à deux fluides version ENIT dans le code MELODIF. Rappelons aussi que le code parabolique avec fermeture au premier ordre (modèle de turbulence à trois équations) est une forme réduite du modèle à deux fluides avec fermeture au second ordre où l'on modélise des équations de transport distinctes pour les composantes turbulente et pseudo-turbulente du tenseur de Reynolds. L'application de ce modèle en écoulement de turbulence homogène avec et sans cisaillement (voir chapitre 3) indiquent que le modèle de turbulence à trois équations fournit des résultats sensiblement identiques à ceux obtenus à l'aide du modèle au second ordre. Dans cette section on veut focaliser l'analyse sur l'aptitude des fermetures au premier ordre à prédéterminer la turbulence dans des situations inhomogènes en l'appliquant à l'écoulement de sillage à bulles. A cet effet on adopte la formulation du terme interfacial et l'ajustement de son expression proposées par Chahed et al (2002) : cet ajustement a permis de préciser les effets du champ moyen et du champ fluctuant sur l'échange interfacial de quantité de mouvement et par voie de conséquence sur la distribution des phases. Appliqué à l'écoulement du sillage à bulles, le code parabolique avec fermeture au second ordre de la turbulence et la version modifiée du code MELODIF fournissent des résultats comparables.

Dans la suite on présente les résultats numériques obtenus avec le code MELODIF dans ses deux versions en écoulement de sillage à bulles avec un ajustement initial aux données expérimentales de Roig (1993). Ensuite, le code MELODIF est mis en œuvre pour produire des expériences numériques typiques notamment pour étudier des écoulements de sillages à bulles où

l'on assure des conditions pour que se réalise un comportement auto-préservatif en écoulement à bulles. Dans toutes les simulations des écoulements diphasiques, le modèle est d'abord testé dans le cas des écoulements monophasiques équivalents. Ces résultats seront interprétés vis-à-vis des effets des bulles sur les propriétés des sillages : en s'appuyant sur la nouvelle formulation de la viscosité turbulente en écoulement à bulles, on cherchera à exprimer les lois d'évolution de l'écoulement diphasique en fonction de celles de l'écoulement monophasique équivalent.

4.3.2 Expériences de l'écoulement de sillage à bulles

L'expérience de l'écoulement de sillage à bulles fait partie d'une série d'expériences d'écoulements cisailés minces 2-D (couches de mélange avec et sans contraste de taux de vide, sillage à bulles à l'aval d'une plaque plane) développées à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse. Dans ces expériences décrites dans Roig (1993) et Roig et al (1998), le sillage est produit par la confluence de deux écoulements similaires qui se développent de part et d'autre d'une plaque plane séparatrice d'épaisseur 2 mm. La vitesse moyenne du liquide, le taux de vide et le diamètre équivalent des bulles utilisés dans ces expériences sont de l'ordre de 0.6 m/s, 2 % et 3 mm. Les mesures de la turbulence réalisées ont concerné l'intensité turbulente longitudinale dans le liquide.

D'une manière analogue à la procédure adoptée dans la mise en œuvre du modèle dans le cas des écoulements homogènes, nous avons commencé par la simulation de l'écoulement du sillage monophasique.

4.3.2.1 Maillage

Nous avons testé la sensibilité des résultats numériques au raffinement du maillage dans les directions verticale et horizontale dans le cas monophasique en choisissant comme variable de référence l'énergie turbulente. Le maillage retenu du domaine de l'écoulement pour les simulations est régulier dans la direction verticale y avec une longueur de maille de 1 cm, et est irrégulier dans la direction horizontale x avec des mailles resserrées au niveau de l'axe du sillage selon la loi suivante :

$$\Delta x(1) = 1.1 \text{ mm}$$

$$\Delta x(i) = \Delta x(i-1)^{1.1} \quad (4-35)$$

$$\text{si } \frac{\Delta x(i)}{\Delta x(i-1)} > 1.2 \quad \text{alors} \quad \Delta x(i) = \Delta x(i-1)$$

4.3.3 Simulation de l'écoulement monophasique

4.3.3.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont ajustées à partir des données expérimentales acquises à 1 cm avant le début du sillage. Le profil de la vitesse moyenne du liquide est fixé par interpolation linéaire du profil expérimental. Le profil de l'énergie turbulente est déduit à partir des données expérimentales relatives à l'intensité turbulente longitudinale du liquide en utilisant une loi déduite expérimentalement par Townsend (1956) et qui fait intervenir l'anisotropie de la turbulence au voisinage de l'axe du sillage :

$$\frac{x}{\delta} < 0.3 \quad : \quad k = 0.64 \overline{u'^2} \quad (4-36)$$

$$0.3 < \frac{x}{\delta} < 0.8 \quad : \quad k = 1.052 \overline{u'^2} \quad (4-37)$$

$$0.8 < \frac{x}{\delta} \quad : \quad k = 1.5 \overline{u'^2} \quad (4-38)$$

avec $\delta = 0.8 \text{ cm}$ l'épaisseur de la couche limite développée sur la plaque de séparation.

Le profil du taux de dissipation à l'entrée est déduit par la relation (4-39) obtenue à partir de l'hypothèse d'équilibre production-dissipation:

$$\varepsilon = c_\varepsilon \frac{c_\mu^{\frac{3}{4}} k^{\frac{3}{2}}}{\chi x} \quad \text{où } c_\varepsilon \text{ est une constante d'ajustement} \quad (4-39)$$

Les valeurs de l'énergie turbulente et du taux de dissipation à la position $x = 0$ sont ajustées de sorte que l'on reproduise le mieux les mesures expérimentales. Notons également qu'on adopte des

conditions de symétrie pour les limites verticales extérieures du domaine de l'écoulement et des conditions de pression constante à la sortie supposée libre.

Signalons enfin que les profils de la vitesse moyenne et de l'intensité turbulente à la section d'entrée ne sont pas parfaitement symétriques. Cette légère dissymétrie de l'écoulement monophasique va s'accroître en écoulement diphasique ; on pense qu'elle est due aux conditions d'injection. Cependant, l'adoption des données expérimentales dans les conditions aux limites à l'entrée permet implicitement d'introduire cette dissymétrie et nous autorise à confronter dans la suite les résultats numériques aux données expérimentales.

4.3.3.2 Résultats numériques

Les figures (4-3) – (4-6) présentent les profils transversaux de la vitesse moyenne et de l'énergie turbulente dans les deux sections $X = 20$ cm et $X = 30$ cm. Ces figures témoignent d'une bonne concordance entre les résultats numériques et expérimentaux.

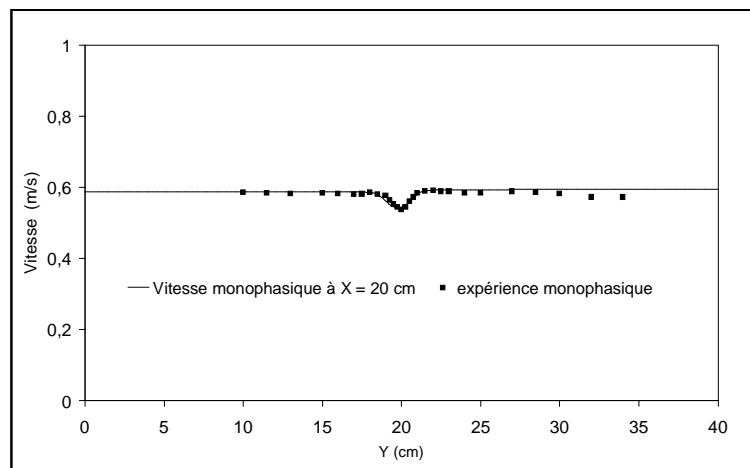


Figure (4-3) : Profil transversal de la vitesse monophasique à la section $X = 20$ cm. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

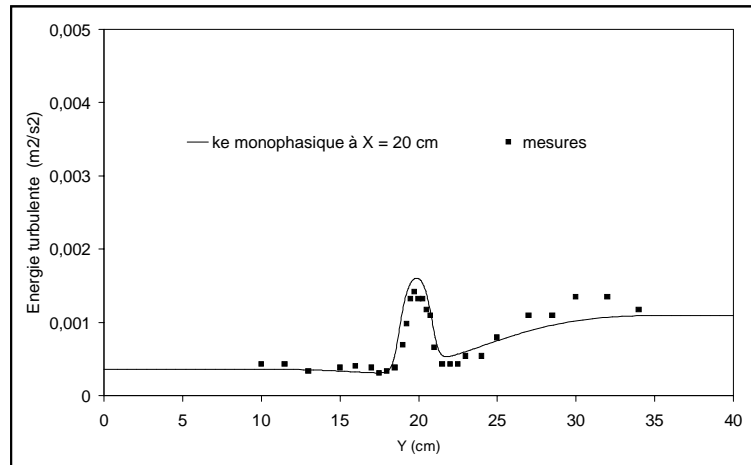


Figure (4-4) : Profil transversal de l'énergie turbulente à la section X = 20 cm. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

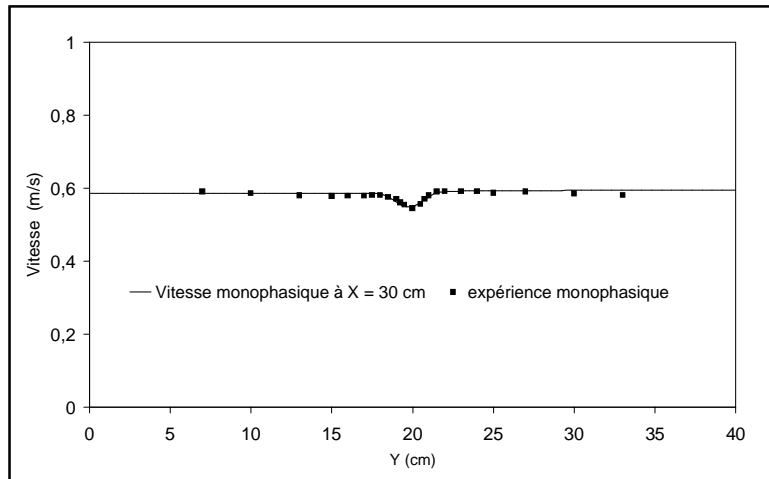


Figure (4-5) : Profil transversal de la vitesse monophasique à la section X = 30 cm. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

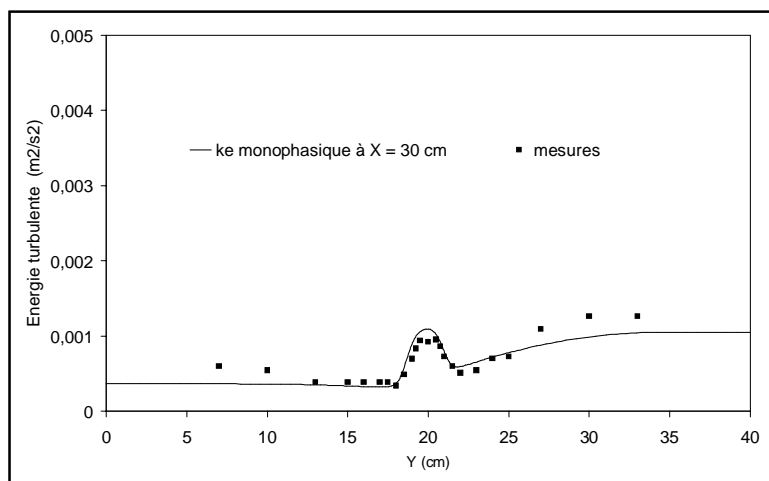


Figure (4-6) : Profil transversal de l'énergie turbulente à la section X = 30 cm. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

4.3.4 Simulation de l'écoulement diphasique

4.3.4.1 Conditions aux limites

Dans les simulations du sillage diphasique, les conditions à l'entrée de l'écoulement sont également fixées à partir des données expérimentales. Les profils de la vitesse du liquide et du taux de présence sont interpolés sur le maillage à partir des mesures à la section d'entrée tandis que le profil de la vitesse du gaz est calculé comme la somme de la vitesse du liquide et la vitesse limite de glissement des bulles. Pour ce qui concerne les grandeurs turbulentes, on identifie la partie turbulente de l'énergie à l'énergie turbulente monophasique dans la section d'entrée. La partie pseudo-turbulente de la composante longitudinale du tenseur de Reynolds dans cette section est calculée comme la différence entre la composante totale mesurée dans le cas du sillage à bulles et celle mesurée dans l'écoulement monophasique. Le profil de l'énergie pseudo-turbulente à l'entrée est ensuite déduit à l'aide de la solution analytique de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984) établie en écoulement potentiel. Bien que ces approximations des deux contributions turbulente et pseudo-turbulente à l'entrée restent assez intuitives, leur validité a été prouvée par la concordance des résultats numériques obtenus avec les observations expérimentales.

4.3.4.2 Résultats et discussions

La figure (4-7) présente les résultats numériques et expérimentaux de Roig (1993) concernant le profil transversal du taux de vide à la section $X = 0.2$ m de l'entrée. Cette figure montre une prédiction satisfaisante de la distribution des phases ce qui prouve la bonne évaluation par le modèle du rôle de la turbulence et des termes interfaciaux dans les bilans de quantité de mouvement des deux phases.

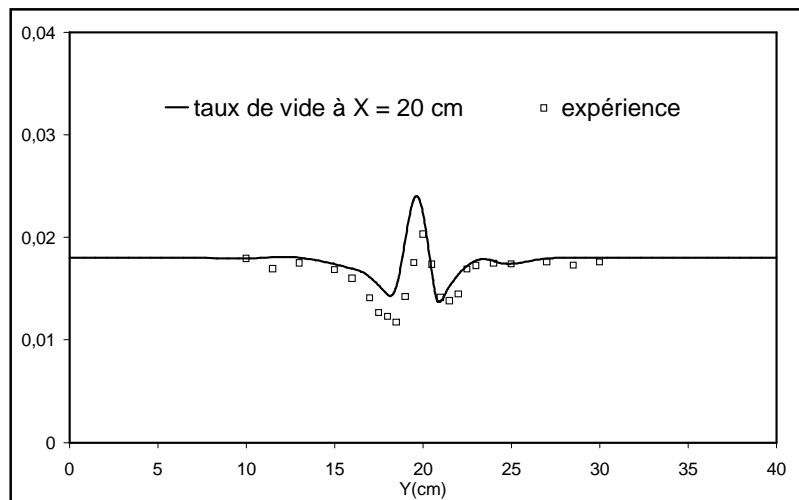


Figure (4-7) : Profil transversal du taux de vide à X=20 cm. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993)

Dans les figures (4-8) et (4-9) nous confrontons les résultats numériques et expérimentaux de Roig (1993) concernant les profils transversaux de l'énergie turbulente et de la vitesse moyenne du liquide dans les cas monophasique et à bulles à la même section $X = 0.2$ m de l'entrée. Nous présentons également dans les figures (4-10) et (4-11) les profils numériques et expérimentaux de ces grandeurs à la section $X = 0.3$ m de l'entrée. Ces figures montrent une concordance satisfaisante avec les résultats expérimentaux. La figure (4-8) indique une augmentation importante de l'énergie turbulente dans le cas diphasique par rapport à l'écoulement monophasique équivalent. Ceci traduit un montant important de l'énergie (pseudo-turbulente) induit par la présence des bulles. Dans ces simulations, la vitesse relative des bulles à l'entrée de l'écoulement est prise égale à sa valeur limite, elle reste ainsi constante dans tout le domaine de l'écoulement ; dans ces conditions, le terme de production dans l'équation de transport de la pseudo-turbulence est nul. Cette partie non dissipative de l'énergie est donc transportée par convection et diffusion turbulente.

Les figures (4-8) – (4-11) indiquent une bonne concordance entre les résultats du modèle et l'expérience : ces résultats sont comparables à ceux obtenus avec le code parabolique avec fermeture au second ordre de la turbulence, Chahed et al (2002). Cela signifie que le modèle au premier (à trois équations de transport) ordre déduit des fermetures au second ordre conserve le contenu physique des modèles initiaux et réussit à l'aide des nouvelles échelles introduites dans l'expression de la viscosité turbulente et dans la modélisation du terme de diffusion de rendre

compte des effets des bulles sur la structure de la turbulence dans un écoulement où la pseudo-turbulence est importante.

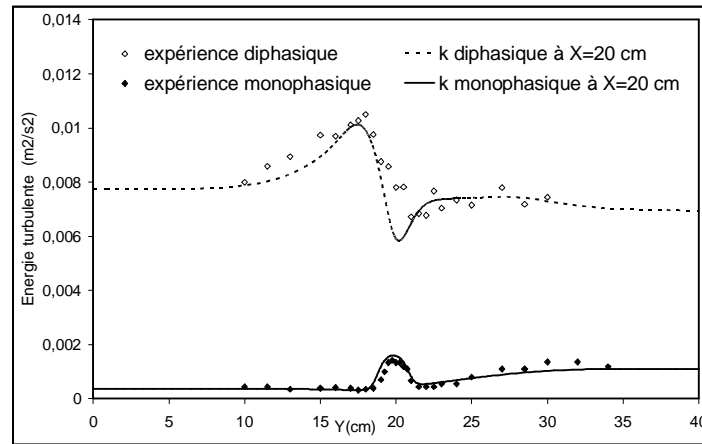


Figure (4-8) : Profils transversaux de l'énergie turbulente à X=20 cm dans le cas du sillage monophasique et à bulles. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

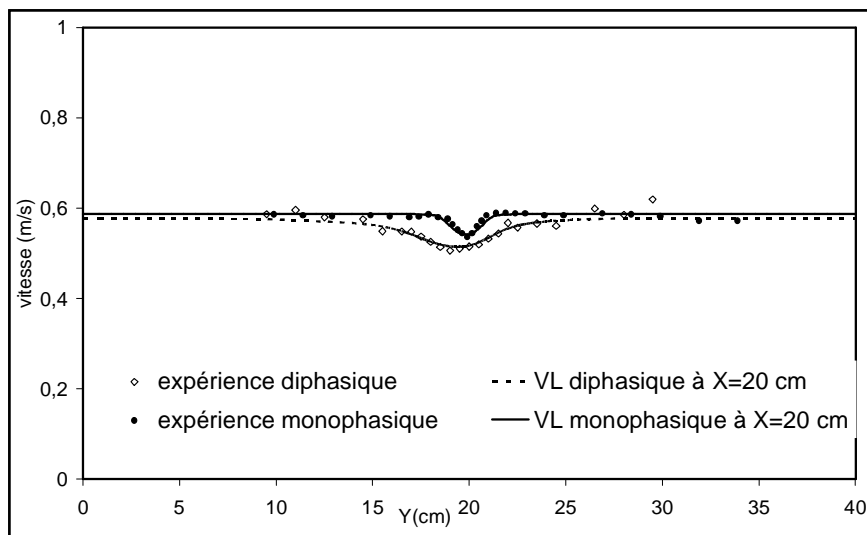


Figure (4-9) : Profils transversaux de la vitesse moyenne du liquide à X=20 cm dans le cas du sillage monophasique et à bulles. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

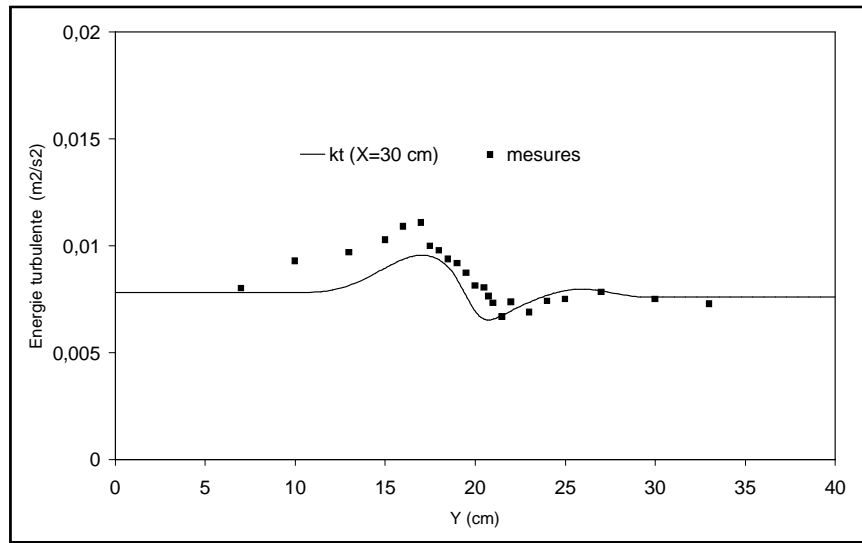


Figure (4-10) : Profil transversal de l'énergie turbulente totale à $X=30$ cm dans le cas du sillage à bulles. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993)

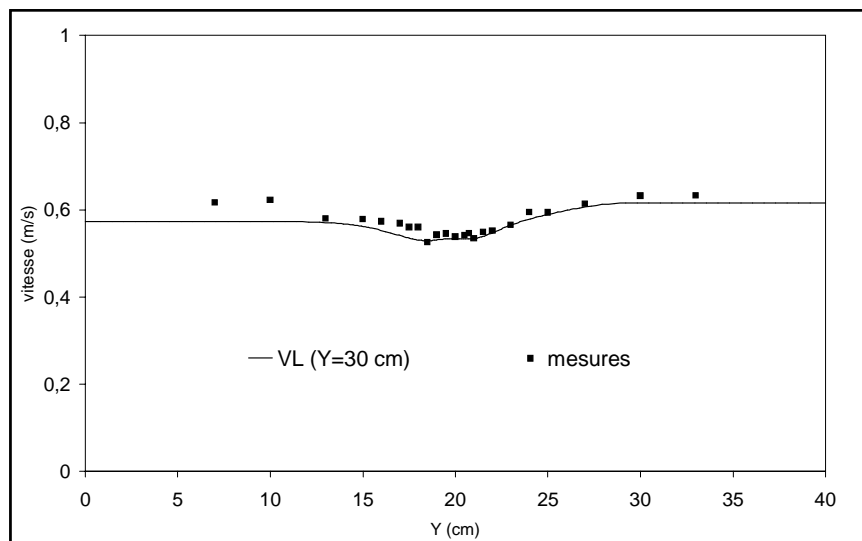


Figure (4-11) : Profil transversal de la vitesse moyenne du liquide à $X=30$ cm dans le cas du sillage à bulles. Comparaison des résultats du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993)

Les figures (4-9) et (4-11) montrent que le modèle réussit à reproduire l'augmentation significative de la largeur du sillage dans le cas diphasique. Cette augmentation de l'ouverture du sillage en écoulement à bulles s'interprète par l'accroissement important de la diffusion de quantité de mouvement en relation avec l'augmentation du frottement turbulent. La nouvelle formulation

proposée pour exprimer la viscosité turbulente en écoulement à bulles indique en effet, qu'en écoulement où la pseudo-turbulence est importante, l'agitation supplémentaire induite par les bulles se traduit par une augmentation de la viscosité turbulente. Elle rend bien compte de cet effet en écoulement de sillage à bulles où le montant de la pseudo-turbulence est important. Pour illustrer cela on porte sur la figure (4-12) le profil transversal du rapport des viscosités turbulentes en écoulement à bulles et en écoulement monophasique équivalent à $X = 0.2$ m. Cette figure indique que dans la zone où se développe le sillage à l'aval de la plaque, la viscosité turbulente en écoulement à bulles est 2 à 5 fois sa valeur en écoulement monophasique équivalent. Avec le même taux de cisaillement le frottement turbulent est multiplié d'autant ; ce qui explique l'important élargissement du sillage en écoulement à bulles en comparaison avec le profil monophasique.

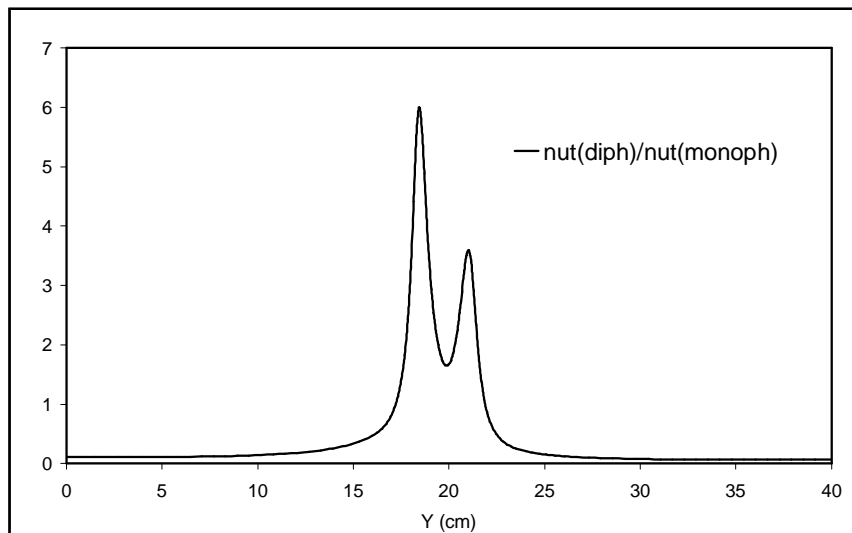


Figure (4-12) : Rapport des viscosités turbulentes diphasique et monophasique à $X=20$ cm

Le modèle de turbulence à trois équations permet de déterminer deux échelles de temps : une échelle relative à la turbulence et une échelle spécifique des effets induits par les bulles. L'expression de la viscosité turbulente qui met en jeux ces deux échelles de temps a permis de rendre compte de la diminution du frottement turbulent en turbulence homogène avec cisaillement uniforme (voir chapitre 3). Elle permet en écoulement de sillage à bulle de reproduire l'importante augmentation du frottement turbulent dans un écoulement à bulles où la pseudo-turbulence est importante.

Dans la version initiale de MELODIF, la viscosité turbulente est générée par un modèle $k-\epsilon$ à deux équations et son expression, analogue à celle du modèle monophasique ne met en jeu qu'une

seule échelle de temps. Pour comparer les deux versions du code, nous avons également calculé le sillage à bulles à l'aide de la version initiale et les résultats dans les deux sections $X = 0.2$ m et $X = 0.3$ m des deux versions sont comparés dans les figures (4-13) – (4-16). Notons que nous avons procédé de la même manière qu'en monophasique pour fixer les conditions aux limites.

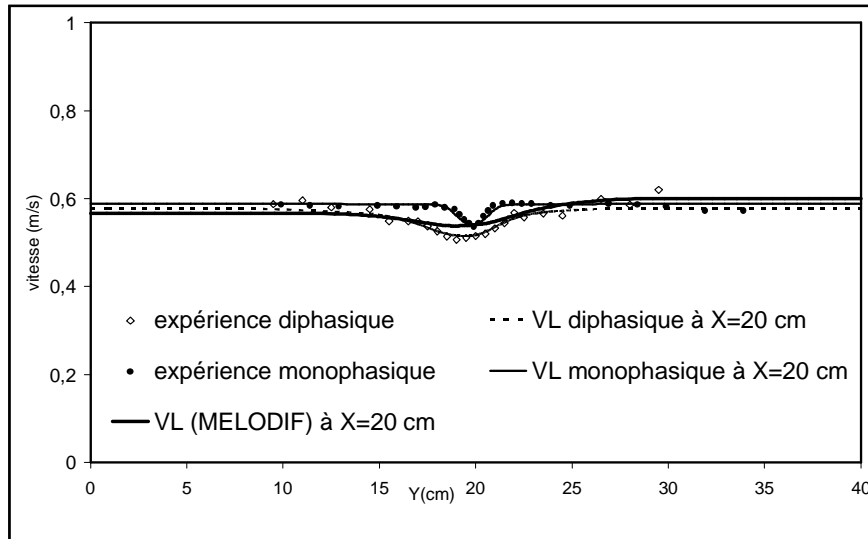


Figure (4-13) : Profils transversaux de la vitesse moyenne du liquide à $X=20$ cm dans le cas du sillage monophasique et à bulles. Comparaison des résultats numériques de la version initiale de MELODIF et du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

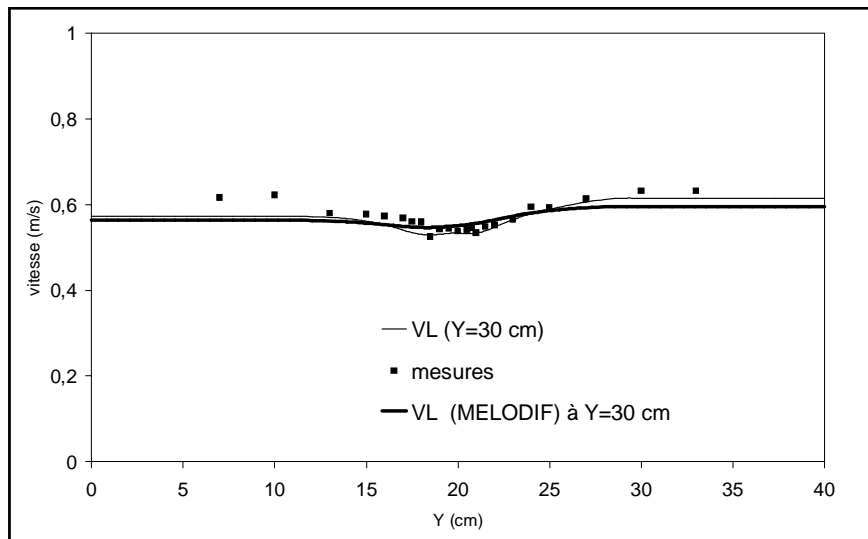


Figure (4-14) : Comparaison des profils transversaux numériques de la vitesse moyenne du liquide à $X=30$ cm dans le cas du sillage à bulles obtenus par la version initiale de MELODIF et la nouvelle version. Confrontation aux données expérimentales de Roig (1993).

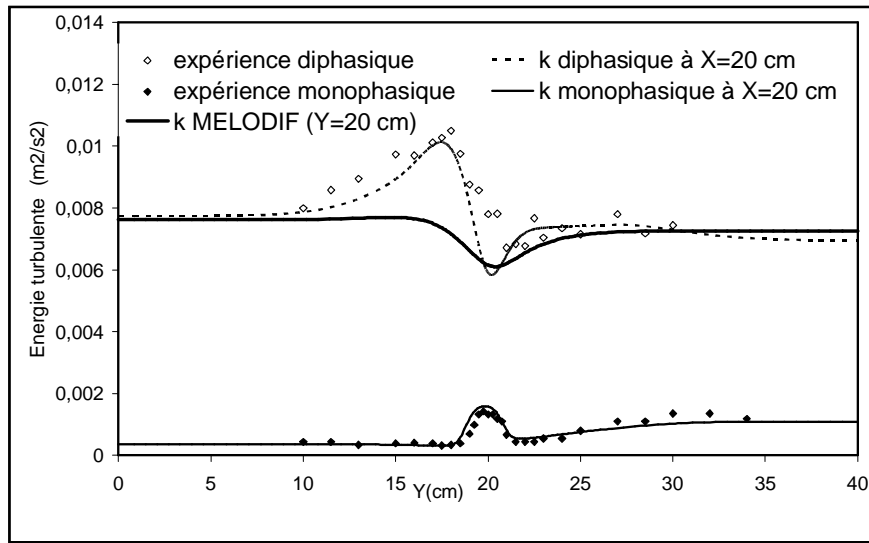


Figure (4-15) : Profils transversaux de l'énergie turbulente à $X=20$ cm dans le cas du sillage monophasique et à bulles. Comparaison des résultats numériques de la version initiale de MELODIF et du modèle avec les données expérimentales de Roig (1993).

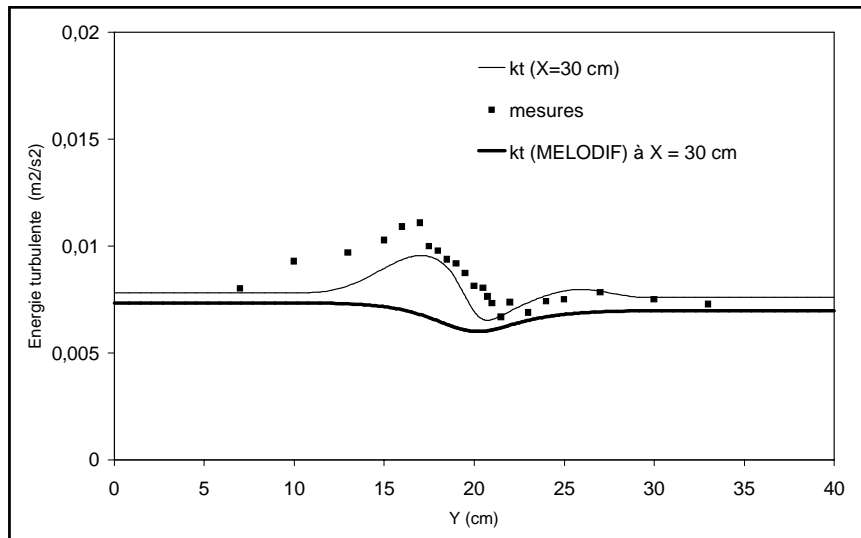


Figure (4-16) : Comparaison des profils transversaux numériques de l'énergie turbulente du liquide à $X=30$ cm dans le cas du sillage à bulles obtenus par la version initiale de MELODIF et la nouvelle version. Confrontation aux données expérimentales de Roig (1993).

Les figures (4-13) et (4-14) montrent que la version initiale du code MELODIF produit une surestimation de l'augmentation de l'ouverture du sillage diphasique en écoulement à bulle. Ce résultat peut s'interpréter par une surévaluation de la viscosité turbulente. Corrélativement la

diffusivité turbulente est surestimée et le profil de l'énergie cinétique turbulente est beaucoup plus étalé que le profil expérimental, figures (4-15) et (4-16). Ces figures indiquent d'autre part que le niveau de l'énergie turbulente calculé par la version initiale est inférieur à celui calculé par la version modifiée. Ce résultat peut s'interpréter par le fait que sans distinction entre la partie turbulente et la partie induite par les bulles, l'énergie totale est supposée participer à la cascade énergétique avec la même échelle de temps ; elle se trouve par conséquent soumise au même taux de dissipation.

Rappelons enfin que des applications similaires de la version initiale du code ont été réalisées dans des écoulements couches de mélange à bulles, Roig (1993). Les résultats obtenus ont conduit à exprimer la viscosité turbulente selon la formulation de Sato et al (1981), c'est à dire comme la somme de la viscosité turbulente monophasique et d'une turbulence induite par les bulles. En améliorant, les résultats du modèle, cette démarche produit en revanche une sous estimation de l'ouverture des couches cisailées en écoulement à bulles. En utilisant des fermetures au second ordre, Chahed (1999) indique en effet que la prise en compte d'une viscosité turbulente induite par les bulles selon le modèle de Sato et al (1981) n'engendre qu'une faible augmentation du frottement turbulent "monophasique" qui n'explique pas l'importante augmentation de l'ouverture des couches cisailées.

4.4 Solution affine du sillage à bulles

4.4.1 Considérations préliminaires

L'interprétation des profils numériques de la vitesse longitudinale du liquide obtenus à partir de la simulation de l'écoulement du sillage à bulles ne montre pas un comportement auto-préservatif même assez loin de l'entrée de l'écoulement. Les profils de vitesses, de taux de vide et des grandeurs turbulentes à l'entrée, qui dans ces simulations sont ajustées à partir des données expérimentales, ne sont pas symétriques et peuvent expliquer que l'on n'obtient pas un comportement auto-préservatif du sillage comme pour l'écoulement monophasique. Il est même probable qu'en général le comportement auto-préservatif de l'écoulement de couches cisailées minces à bulles ne peut s'obtenir qu'avec une condition sur le profil de taux de vide.

En particulier, à taux de vide constant, le système d'équations dynamiques du modèle à deux fluides écrites dans l'hypothèse de l'écoulement quasi-parallèle se réduit à une forme similaire au système d'équation de l'écoulement monophasique qui, par conséquent, peut se prêter au même traitement analytique pour obtenir des solutions affines. La différence entre les deux systèmes réside dans l'expression du frottement turbulent qui en écoulement à bulle va être exprimée avec une viscosité turbulente modifiée par les effets interfaciaux.

On se propose dans ce paragraphe d'utiliser le modèle à deux fluides pour étudier le comportement auto-préservatif de l'écoulement du sillage diphasique à taux de vide constant. L'interprétation des résultats des simulations permet ensuite de proposer des solutions affines à cet écoulement en s'appuyant sur la définition de la viscosité turbulente en écoulement à bulles.

4.4.2 Sillage lointain monophasique

4.4.2.1 Comportement auto-préservatif et solution affine du sillage lointain

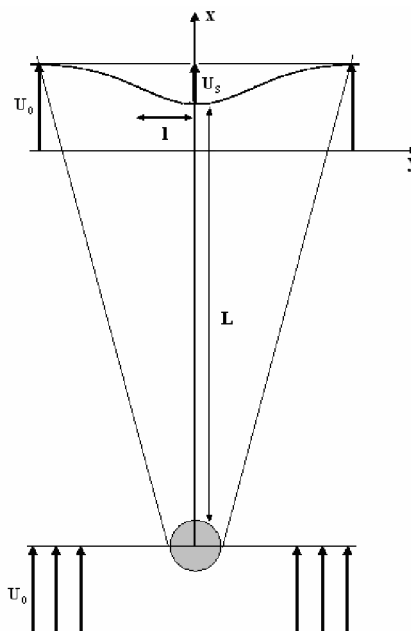


Figure (4-17) : échelles caractéristiques d'un sillage

Nous rappelons que les gradients de vitesse moyenne et la turbulence sont confinés en écoulement de sillage dans une couche mince d'épaisseur $l^{(m)}$ (échelle diffusive) faible vis-à-vis de l'échelle advective L dans la direction générale de l'écoulement. A l'extérieur de cette couche le fluide est immobile ou en mouvement uniforme non turbulent. Le champ de vitesse moyenne est caractérisé par deux échelles correspondant à la vitesse U_0 de l'écoulement non perturbé à l'extérieur du sillage et du déficit de vitesse à l'axe du sillage $U_s^{(m)} = U_0 - \overline{u_{\text{axe du sillage}}}$ monoph. . Tandis que les fluctuations turbulentes sont décrites par une échelle des fluctuations u_0 . On définit le nombre de Reynolds turbulent $R_{el} = \frac{u_0 l}{\nu}$.

Forme asymptotique des équations de bilan de masse et de quantité de mouvement

Une analyse des ordres des grandeurs des différents termes dans les bilans de masse et de quantité de mouvement montre lorsque les échelles vérifient les relations suivantes :

$$\frac{l^{(m)}}{L} \rightarrow 0 ; R_{el} \rightarrow \infty \quad (4-40)$$

$$\frac{u_0}{U_s^{(m)}} \approx O(1) \quad \text{et} \quad \frac{u_0}{U_0} \approx O\left(\frac{l^{(m)}}{L}\right) \quad (4-41)$$

les équations de bilans de masse et de quantité de mouvement se réduisent aux formes asymptotiques suivantes :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} = 0 \quad (4-42)$$

$$U_0 \frac{\partial \overline{u}}{\partial x} = - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} \quad (4-43)$$

$$\frac{\overline{p}}{\rho_L} + \overline{v'^2} = \frac{P_e(x)}{\rho} \quad (4-44)$$

Le flux de déficit de quantité de mouvement à travers la section transversale de l'écoulement se conserve et il est donné par l'expression :

$$M_0 = \rho \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u} (U_0 - \bar{u}) dy = \frac{C_D}{2} \rho U_0^2 d \quad (4-45)$$

où C_D est le coefficient de traînée de l'obstacle et d est une distance caractéristique de l'obstacle placé dans un écoulement uniforme de vitesse U_0 . On définit l'épaisseur de quantité de mouvement dans le sillage δ par la relation :

$$M_0 = \rho U_0^2 \delta \quad (4-46)$$

La relation (4-45) montre que l'épaisseur de déficit de quantité de mouvement est proportionnelle au coefficient de traînée :

$$\delta = C_D \frac{d}{2} \quad (4-47)$$

Solution affine du sillage lointain monophasique

On peut interpréter d'un point de vue physique le comportement auto-préservatif du sillage par la perte de mémoire, à partir d'une certaine distance de l'obstacle, des conditions d'entrée. L'écoulement reproduit une structure identique du champ de vitesse moyenne et de la turbulence dans les différentes sections transversales dont l'évolution longitudinale sera décrite par la variation des échelles caractéristiques.

On s'attend dans ce cas que l'équation (4-43) admette des solutions de la forme :

$$U^+ = \frac{U_0 - \bar{u}}{U_s^{(m)}} = F(\eta) \quad \text{et} \quad \frac{-\overline{u'v'}}{U_s^{(m)2}} = G(\eta) \quad (4-48)$$

avec $\eta = \frac{y}{l^{(m)}}$: est une coordonnée adimensionnelle transversale.

L'injection des expressions (4-48) dans l'équation (4-43) permet d'établir que la condition d'affinité impose les relations suivantes des échelles :

$$\frac{l^{(m)}}{U_s^{(m)2}} \frac{dU_s^{(m)}}{dx} \approx \text{constante} \quad \text{et} \quad \frac{l^{(m)}}{U_s^{(m)2}} \frac{dl^{(m)}}{dx} \approx \text{constante} \quad (4-49)$$

D'autre part, la conservation du flux transversal de déficit de quantité de mouvement impose la condition suivante :

$$l^{(m)} U_s^{(m)} \approx \text{constante} \quad (4-50)$$

A propos du champ fluctuant, l'expression de la contrainte turbulente de cisaillement en fonction du gradient de vitesse moyenne sous la forme :

$$\frac{-\overline{u'v'}}{\overline{\frac{\partial u}{\partial y}}} = l^{(m)} U_s^{(m)} \left(-\frac{G(\eta)}{F'(\eta)} \right) \quad (4-51)$$

permet d'exprimer le frottement turbulent à l'aide d'une viscosité turbulente indépendante de la position longitudinale x :

$$\nu_t^{(m)}(\eta) = l^{(m)} U_s^{(m)} \left(-\frac{G(\eta)}{F'(\eta)} \right) = \frac{1}{R_{ET}^{(m)}(\eta)} l^{(m)} U_s^{(m)} \quad (4-52)$$

Cette expression définit le champ de viscosité turbulente comme une propriété de l'écoulement puisque $U_s^{(m)}(x)$ et $l^{(m)}(x)$ sont des grandeurs macroscopiques de l'écoulement. En admettant l'homogénéité transversale du mélange, la viscosité turbulente sera constante à travers la section transversale et par conséquent le nombre de Reynolds $R_{ET}^{(m)}$.

La résolution de l'équation (4-43) compte tenu des conditions (4-48), (4-49) et (4-40) permet d'établir le profil affine adimensionnel de la vitesse qui s'écrit :

$$F(\eta) = \exp(-m\eta^2) \quad (4-53)$$

où m est une constante, l'échelle de longueur l est choisie telle que $m = 1$.

Les échelles caractéristiques de longueur et de vitesse s'expriment en fonction de l'épaisseur de déficit de quantité de mouvement δ et du nombre de Reynolds R_{ET} par les relations suivantes :

$$\frac{l^{(m)}}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{R_{ET}^{(m)}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{x}{\delta}} \quad (4-54)$$

$$\frac{U_s^{(m)}}{U_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{R_{ET}^{(m)}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{\delta}{x}} \quad (4-55)$$

4.4.2.2 Simulations du sillage monophasique

Les résultats numériques obtenus par la simulation du sillage monophasique concernant la vitesse moyenne longitudinale montrent qu'assez loin de l'entrée de l'écoulement s'établit un profil affine adimensionnel, figure (4-18). Ce profil est en accord avec la solution affine du sillage (Tenneckes et Lumley 1973). Les échelles de longueur et de vitesse déduits à partir des profils numériques monophasiques à différentes sections sont données dans le tableau (4-1).

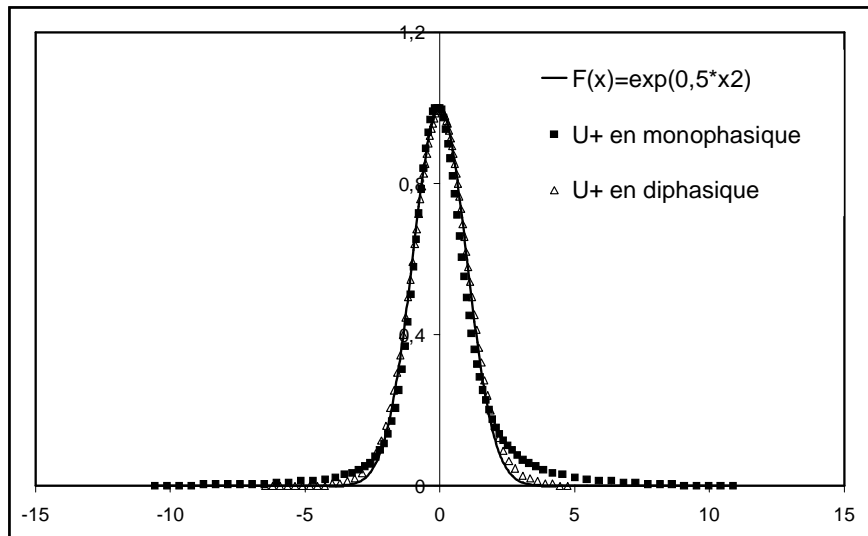


Figure (4-18) : Profils adimensionnels de la vitesse moyenne du liquide dans le sillage monophasique et à bulles. Comparaison avec le profil théorique de Lumley (1973).

Tableau (4-1) : Echelles caractéristiques de vitesse et de longueur à différentes sections du sillage monophasique

Sections	$l^{(m)}$ (m)	$V_s^{(m)}$ (m/s)	$l^{(m)}V_s^{(m)}$ (m ² /s)
X=0.6 m	0.012	0.028	336.10^{-6}
X=0.8 m	0.014	0.024	336.10^{-6}
X=0.9 m	0.015	0.022	320.10^{-6}

4.4.3 Sillage lointain diphasique

4.4.3.1 Comportement auto-préservatif et solution affine du sillage à bulles à taux de vide constant

Les équations de bilans moyens en écoulement à bulles (4-1) – (4-4) s'écrivent dans le cas d'un écoulement stationnaire bidimensionnel sous les formes générales suivantes :

Dans le liquide :

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\overline{u_1} \frac{\partial \overline{v_1}}{\partial x} + \overline{v_1} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial y} \right] = -\alpha_1 \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \overline{u_1' v_1'}) - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \overline{v_1'^2}) - M_y \quad (4-56)$$

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\overline{u_1} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x} + \overline{v_1} \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial y} \right] = -\alpha_1 \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \overline{u_1'^2}) - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \overline{u_1' v_1'}) - \rho_1 \alpha_1 g - M_x \quad (4-57)$$

Dans le gaz :

$$\rho_2 \alpha_2 \left[\overline{u_2} \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial x} + \overline{v_2} \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial y} \right] = -\alpha_2 \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2 \overline{u_2' v_2'}) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_2 \overline{v_2'^2}) + M_y \quad (4-58)$$

$$\rho_2 \alpha_2 \left[\overline{u_2} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x} + \overline{v_2} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial y} \right] = -\alpha_2 \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} - \rho_2 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_2 \overline{u_2'^2}) - \rho_2 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_2 \overline{u_2' v_2'}) - \rho_2 \alpha_2 g + M_x \quad (4-59)$$

En négligeant l'accélération et le poids des bulles vis-à-vis des forces qu'exerce sur elles le liquide, les équations (4-58) et (4-59) se réduisent à :

$$0 = -\alpha_2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + M_y \quad (4-60)$$

$$0 = -\alpha_2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + M_x \quad (4-61)$$

Par conséquent, les équations (4-56) et (4-57) s'écrivent :

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \bar{u}_1' \bar{v}_1') - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \bar{v}_1'^2) \quad (4-62)$$

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \bar{u}_1'^2) - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \bar{u}_1' \bar{v}_1') - \rho_1 \alpha_1 g \quad (4-63)$$

Dans le cadre de l'hypothèse d'une répartition uniforme du taux de vide, les équations de bilans dans le liquide s'écrivent :

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \bar{u}_1' \bar{v}_1') - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \bar{v}_1'^2) \quad (4-64)$$

$$\rho_1 \alpha_1 \left[\bar{u}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x} + \bar{v}_1 \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_1 \bar{u}_1'^2) - \rho_1 \frac{\partial}{\partial y} (\alpha_1 \bar{u}_1' \bar{v}_1') \quad (4-65)$$

Avec $P = \bar{p} + \rho_1 \alpha_1 g$ est la pression motrice, ces équations sont équivalentes à celles monophasiques. L'écoulement de sillage à bulles à taux de vide uniforme se comporte par conséquent d'une manière identique au sillage monophasique en ce qui concerne le comportement auto-préservatif. La présence de la phase dispersée intervient dans la modification des échelles caractéristiques $l^{(d)}$ et $U_s^{(d)}$ par comparaison aux échelles correspondant monophasiques.

Si on suppose que les sillages monophasique et à bulles possèdent le même profil de vitesse à l'entrée. Ceci s'interprète d'un point de vue physique par le même déficit de quantité de mouvement induit par l'obstacle dans les deux cas. Nous assistons alors dans le sillage à bulles à une modification des échelles caractéristiques $l^{(d)}$ et $U_s^{(d)}$ par rapport à celles de l'écoulement monophasique tout en préservant l'égalité :

$$l^{(d)} U_s^{(d)} = l^{(m)} U_s^{(m)} \quad (4-66)$$

4.4.3.2 Simulation du sillage à bulles à taux de vide constant

Les simulations de l'écoulement de sillage à bulles à taux de vide uniforme sont effectuées avec le même profil de vitesse à l'entrée que pour le sillage monophasique. Les résultats obtenus dans ce cas montrent que les profils de vitesse ont un comportement auto-préservatif (figure (4-18)) avec, à différentes sections, les échelles caractéristiques présentées dans le tableau (4-2) :

Tableau (4-2) : Echelles caractéristiques de vitesse et de longueur à différentes sections du sillage à bulles

Sections	$l^{(d)}$ (m)	$U_s^{(d)}$ (m/s)	$l^{(d)} U_s^{(d)}$ (m ² /s)
X=0.6 m	0.0187	0.0178	333.10^{-6}
X=0.8 m	0.0225	0.015	337.10^{-6}
X=0.9 m	0.0241	0.014	337.10^{-6}

L'examen des tableaux (4-1) et (4-2) indique que les calculs produisent des valeurs voisines des produits $l^{(m)} U_s^{(m)}$ (en écoulement monophasique) et $l^{(d)} U_s^{(d)}$ (en écoulement diphasique) ; cela signifie que le déficit de quantité de mouvement induit par la plaque séparatrice est le même dans les deux écoulements. Ce résultat est cependant obtenu avec des valeurs d'ouverture et de vitesse différentes : on a $l^{(d)} > l^{(m)}$ et $u_s^{(d)} < u_s^{(m)}$.

En sillage diphasique, la propriété d'affinité produite par les résultats numériques peut s'interpréter par l'introduction d'une viscosité turbulente diphasique :

$$v_t^{(d)} = v_t^{(m)} \Gamma \quad (4-67)$$

où Γ est un coefficient attribué à l'effet des bulles sur la diffusivité de quantité de mouvement. Il s'en suit alors la définition d'un nombre de Reynolds diphasique par la relation :

$$R_{et}^{(d)} = \frac{R_{et}^{(m)}}{\Gamma} \quad (4-68)$$

les échelles caractéristiques diphasiques s'écrivent ainsi :

$$\frac{l^{(d)}}{\delta} = \sqrt{\frac{1}{R_{et}^{(m)}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\Gamma} \sqrt{\frac{x}{\delta}} \quad (4-69)$$

$$\frac{u_s^{(d)}}{u_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{R_{et}^{(m)}}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \sqrt{\frac{\delta}{x}} \quad (4-70)$$

Compte tenu des équations (4-54), (4-55), (4-56) et (4-70) on déduit les relations :

$$\frac{l^{(d)}}{l^{(m)}} = \sqrt{\Gamma} \quad \text{et} \quad \frac{u_s^{(d)}}{u_s^{(m)}} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \quad (4-71)$$

Si on revient sur la modélisation (4-12) de la viscosité turbulente diphasique, nous pouvons interpréter cette formulation comme le produit $\nu_{t0}\varphi(x,y)$ où ν_{t0} est la viscosité turbulente qu'aurait le sillage monophasique ayant les échelles caractéristiques $l^{(d)}$ et $U_s^{(d)}$. La fonction $\varphi(x,y)$ est une fonction adimensionnelle qui tient compte de la compétition entre les mécanismes de la turbulence et la pseudo-turbulence à travers les rapports $\frac{k_s}{k_0}$ et $\frac{\tau_t}{\tau_b}$. Lorsque le comportement affine est établi, l'expression de ces rapports (supposés constants à travers la section de l'écoulement) en fonction des échelles macroscopiques de l'écoulement permet alors de déduire le coefficient Γ .

En ce qui concerne le temps τ_t , l'hypothèse d'équilibre production-dissipation permet d'écrire :

$$\varepsilon_0 = -\overline{u'v'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \approx -\overline{u'v'}^{(0)} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (4-72)$$

avec :

$$-\overline{u'v'}^{(0)} = \nu_{t0} \frac{\partial \overline{u}}{\partial y} \quad (4-73)$$

nous déduisons l'expression alors suivante de τ_t :

$$\tau_t = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \frac{l^{(d)}}{u_s^{(d)}} \quad (4-74)$$

D'autre part le temps τ_b est donné par la relation :

$$\tau_b = C_R \frac{d}{\overline{u_R}} \quad (4-75)$$

L'énergie pseudo-turbulente k_s peut être exprimée à l'aide de la solution théorique de Biesheuvel et Van Wijngaarden (1984) :

$$k_s = \frac{1}{4} \alpha \overline{u_R}^2 \quad (4-76)$$

D'autre part, en écrivant la viscosité turbulente ν_{t0} sous la forme :

$$\nu_{t0} = C_\mu k_0 \tau_t = \frac{l^{(d)} U_s^{(d)}}{R_{ET}^{(m)}} \quad (4-77)$$

on déduit l'expression suivante de la partie turbulente k_0 de l'énergie cinétique turbulente :

$$k_0 = \frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \frac{U_s^{(d)2}}{R_{ET}^{(m)}} \quad (4-78)$$

Compte tenu des expressions (4-74), (4-75), (4-76) et (4-78) le coefficient Γ s'écrit :

$$\Gamma = \frac{1 + \left(\frac{\sqrt{C_\mu}}{4c} R_{ET}^{(m)} \right) \alpha \left(\frac{\overline{u_R}}{U_s^{(d)}} \right)^2}{1 + \frac{\alpha}{c_R \sqrt{C_\mu}} \frac{l^{(d)}}{d} \frac{\overline{u_R}}{U_s^{(d)}}} \quad (4-79)$$

Sachant que les rapports $\frac{\overline{u_R}}{u_s^{(d)}}$ et $\frac{l^{(d)}}{u_s^{(d)}}$ augmentent avec l'abscisse x ; en se plaçant suffisamment loin du début du sillage, on peut exprimer le coefficient Γ , par l'approximation suivante :

$$\Gamma \approx \frac{C_\mu R_{ET}^{(m)}}{4C_R} \frac{d \overline{u_R}}{l^{(d)} U_s^{(d)}} \quad (4-80)$$

Le nombre de Reynolds $R_{ET}^{(m)}$ est ajusté par rapport à l'expérience à la valeur 12.5 (Lumley 1973). En se référant aux expériences de Roig (1993) pour des bulles de diamètre moyen de l'ordre de 3 mm et une vitesse relative de l'ordre de 0.4 m/s, on calcule une valeur du coefficient $\Gamma \approx 1.5$.

Le tableau (4-3) présente les rapports $\frac{l^{(d)}}{l^{(m)}}$ et $\frac{U_s^{(m)}}{U_s^{(d)}}$ déduits à partir des résultats numériques dans les trois sections considérées.

Tableau (4-3) : Rapports des échelles monophasiques et diphasiques

Sections	$\frac{l^{(d)}}{l^{(m)}}$	$\frac{U_s^{(m)}}{U_s^{(d)}}$
X=0.6 m	1.56	1.56
X=0.8 m	1.61	1.61
X=0.9 m	1.6	1.59

On déduit une valeur de Γ telle que $\sqrt{\Gamma} \approx 1.6$, soit alors $\Gamma \approx 2.6$. Nous remarquons que les valeurs de Γ déduites directement des résultats numériques et analytiquement à partir de la relation (4-68) sont du même ordre de grandeur bien qu'un écart apparaît qui peut être attribué à l'estimation de l'énergie pseudo-turbulente (4-76) qui semble sous-estimer les niveaux de la pseudo-turbulence.

4.5 Conclusion

La mise en œuvre du modèle eulérien à deux fluides avec fermeture au premier ordre de la turbulence (modèle à trois équations) dans la simulation d'un écoulement inhomogène à frontière libre (sillage à bulles) a permis de valider les modélisations et de tester la capacité de ce dernier à reproduire les fermetures dans une situation d'écoulement à bulles où la pseudo-turbulence est importante. Avec des ajustements appropriés des conditions d'entrée vis à vis des données

expérimentales, les résultats obtenus dans cette simulation sont comparables à ceux obtenus avec le code parabolique avec fermeture au second ordre de la turbulence. L'ensemble de ces résultats conduit aux conclusions suivantes :

- Les profils de l'énergie turbulente monophasique et diphasique montrent que la turbulence diphasique est correctement prédite comme la somme des contributions turbulente et pseudo-turbulente. Sachant que l'énergie pseudo-turbulente est non dissipative, la quantité imposée à l'entrée est ainsi essentiellement convectée et diffusée..
- L'accord entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux montre que le modèle génère correctement l'augmentation du frottement turbulent induite par l'agitation des bulles via la formulation de la viscosité turbulente adoptée.
- Le profil du taux de vide montre que le modèle reproduit convenablement la répartition des phases. Cela indique que les termes interfaciaux dans les équations dynamiques peuvent être correctement représentées en s'appuyant sur les fermetures au premier ordre proposées.

L'application du modèle à deux fluides avec le modèle de turbulence à trois équations à la simulation de l'écoulement hypothétique de sillage à bulles à taux de vide uniforme permet l'étude du comportement auto-préservatif du sillage diphasique ainsi que l'évaluation des échelles caractéristiques qui le contrôlent. En comparaison avec l'écoulement de sillage monophasiques, ces échelles expliquent la modification de la structure du sillage diphasique obtenue par simulation numérique.

Chapitre 5 : Ecoulement à bulles à fort taux de vide

5.1 Introduction

Le modèle eulérien à deux fluides avec des fermetures au premier et au second ordre de la turbulence présenté et mis en œuvre dans les chapitres 3 et 4 est développé pour les écoulements turbulents à bulles sphériques à faibles taux de vide où les interactions hydrodynamiques entre les bulles sont supposées faibles. Les limitations du modèle se situent en premier lieu au niveau de la formulation des termes interfaciaux dans les équations des champs des vitesses moyennes : la prise de moyenne du terme interfacial, suppose que le diamètre des bulles est relativement petit vis-à-vis des tailles des structures turbulentes les plus énergétiques. Ceci est vrai pour les petites bulles mais cette hypothèse constitue une sérieuse limitation pour les bulles de plus grandes tailles. En effet, l'expression même de la force instantanée n'est valable que pour des bulles sans déformation notable. L'autre limitation du modèle vis-à-vis du diamètre des bulles concerne la modélisation de la turbulence de la phase continue et de la phase dispersée : il s'agit notamment de la décomposition linéaire du tenseur de Reynolds et de l'hypothèse d'équilibre "production-dissipation" dans les sillage.

Les forts couplages entre la phase continue et la phase dispersée dans les écoulements relativement denses n'autorisent pas les simplifications adoptées et renvoie à la nécessité de développer des modélisations plus générales qui prennent en compte l'effet des interactions hydrodynamiques dans les lois de fermeture du transfert interfacial de quantité de mouvement et dans la modélisation de la turbulence.

La modélisation de la turbulence est basée sur la séparation des mécanismes de la turbulence (décrits par des échelles de temps spécifiques) et le tenseur de Reynolds est décomposé en

contributions turbulente et pseudo-turbulente statistiquement indépendantes. L'hypothèse d'équilibre entre production et dissipation dans les sillages des bulles conduit à modéliser une équation de transport de la pseudo-turbulence où les fluctuations turbulentes induites par l'agitation des bulles sont attribuées exclusivement à la puissance développée par la force de la masse ajoutée dans le mouvement relatif des bulles. Le modèle de pseudo-turbulence ne tient pas compte de la turbulence produite dans les sillages et son montant est fixé par les conditions aux limites. Quand les bulles atteignent leur vitesse limite, le modèle de pseudo-turbulence ne fait que transporter cette énergie.

Les expériences récentes en écoulements gaz-liquide à forts taux de vide montrent d'importantes modifications de la structure des écoulements diphasiques. Dans les écoulements à forts taux de présence du gaz (milieu dense), les interactions hydrodynamiques sont fortes et elles ont des effets importants sur la structure des champs moyens, fluctuant et de distribution des phases dans les écoulements diphasiques. En particulier, les expériences réalisées en écoulements à bulles à fort taux de vide (Zuber et Ischii 1979, Larue de Tournemine 2001, Garnier et al 2002) indiquent que la vitesse relative du gaz décroît avec l'augmentation du taux de vide. Les expériences de Larue de Tournemine (2001) et de Garnier et al (2002) montrent d'autre part que l'énergie cinétique turbulente induite par les bulles, qui s'exprime selon la solution potentielle proportionnellement à αU_R^2 , ne suit pas la diminution de la vitesse relative à fort taux de vide. Les mesures de Larue de Tournemine (2001) semblent indiquer que l'énergie turbulente induite par les bulles devrait être normée par la vitesse relative déterminée par rapport au champs dit "lointain" dont la valeur est plus importante que la vitesse relative déterminée localement (par rapport au champs dit "proche"). Ces résultats indiquent que le modèle de l'énergie pseudo-turbulente basé sur la solution potentielle et qui attribue la variation de l'énergie turbulente induite par les bulles aux seuls effets de la force de la masse ajoutée est incomplet et il est nécessaire de tenir compte de l'effet des interactions hydrodynamiques ainsi que de l'énergie produite au niveau des sillages pour les écoulements à taux de vide relativement élevés. Les expériences récentes en écoulement homogène à forts taux de vide de Larue de Tournemine (2001) et de Garnier et al (2002) fournissent des données remarquables pour tester de nouvelles idées de modélisation et pour développer des modèles plus généraux.

On se propose dans la suite de bâtir un modèle qui permet une interprétation simple de ces résultats expérimentaux.

5.2 Etude du sillage d'une bulle en écoulement à bulles

5.2.1 Bilan de QDM dans le sillage lointain

5.2.1.1 Formulation du problème et équations de base

On se place dans le cas d'un réseau de bulles homogène et nous considérons le volume de contrôle L^3 contenant une bulle (Chahed et al 2004). Le taux de vide est donné par :

$$\alpha = \frac{\frac{\pi d^3}{6}}{L^3} \quad (5-1)$$

où L est la distance inter-bulles :

$$L = \eta d \alpha^{-\frac{1}{3}} \quad \text{avec} \quad \eta = \left[\frac{\pi}{6} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5-2)$$

On remarque aisément que lorsque $\alpha \rightarrow 0$ on a $L \gg d$ et inversement. Pour étudier le sillage lointain à l'aval de la bulle, on se place donc dans l'hypothèse $L \gg d$. Remarquons que lorsque cette distance est de l'ordre du diamètre de la bulle, cela conduit dans le cadre du schéma du réseau uniforme à la condition :

$$\frac{L}{d} \geq 2 \quad \text{donc} \quad \alpha \leq 0.065 \quad (5-3)$$

Cette estimation place, d'emblée ce développement dans le cadre des écoulements à bulles très dilués.

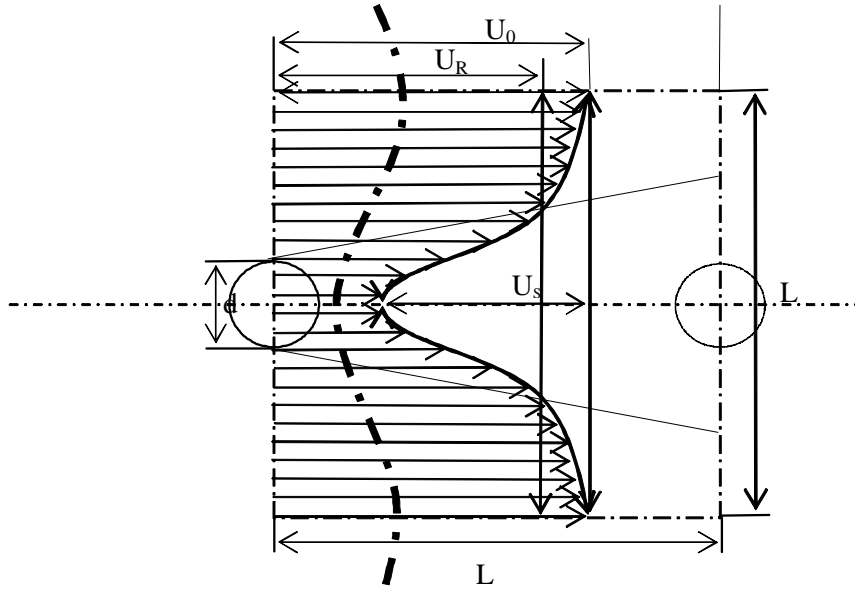


Figure (5-1) : Schéma d'un sillage à bulle en écoulement confiné

La figure (5-1) montre le domaine de référence sur lequel va porter l'analyse. Ce domaine est cubique, le sillage créé par la bulle est un sillage axisymétrique qui met en jeux comme pour le sillage plan (voir paragraphe 4.5.2 au chapitre 4) :

- Deux échelles de longueur caractéristiques : l'échelle diffusive l très faible devant l'échelle advective L .
- Deux échelles de vitesse caractéristiques du champ cinématique moyen : la vitesse U_0 de l'écoulement à l'extérieur du sillage et le déficit de vitesse à l'axe du sillage $U_s = U_0 - \bar{u}_{\text{axe du sillage}}$.
- Une échelle de vitesse u_0 caractéristique des fluctuations turbulentes.

En raison de la symétrie cylindrique de l'écoulement, les équations de bilans moyens de masse et de quantité de mouvement se réduisent dans le sillage lointain aux formes asymptotiques suivantes:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial (y \bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (5-4)$$

$$U_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = -\frac{1}{y} \frac{\partial (y \overline{u'v'})}{\partial y} \quad (5-5)$$

$$-\frac{1}{\rho_L} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{1}{y} \frac{\partial (y \overline{v'^2})}{\partial y} = 0 \quad (5-6)$$

On remarque que pour les écoulements à très faibles taux de vide on identifie la vitesse relative à celle d'une bulle évoluant en milieu infini $U_0 = U_R$. En revanche quand la bulle évolue en milieu confiné comme c'est le cas en écoulement à bulles à taux de vide plus important, on a $U_0 \geq U_R$ du fait de l'entraînement du liquide associé au confinement. Comme dans le sillage libre U_0 est définie à partir des conditions amont en établissant l'équation intégrale de quantité de mouvement.

Le flux de quantité de mouvement à travers la section transversale qui se conserve s'écrit dans le cas du sillage axisymétrique sous la forme suivante :

$$M_0 = \rho_L \int_0^{\frac{L}{2}} [U(U_0 - U)] 2\pi y dy = \frac{1}{2} C_D A U_0^2 \quad (5-7)$$

où $A = \frac{\pi d^2}{4}$ dans le cas d'une bulle sphérique.

On définit également pour le sillage axisymétrique l'épaisseur de déficit de quantité de mouvement θ par la relation suivante :

$$M_0 = \rho_L U_0^2 \theta^2 \quad (5-8)$$

La relation (5-7) montre alors que cette épaisseur s'écrit :

$$\theta = \sqrt{\frac{C_D A}{2}} \quad (5-9)$$

5.2.1.2 Solution du sillage lointain

D'une manière analogue au cas du sillage plan, la recherche d'une solution affine pour l'équation (5-5) de la forme :

$$U^+ = \frac{U_0 - \bar{u}}{U_s} = f(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{y}{l^{(m)}} \quad (5-10)$$

permet de trouver la solution suivante (Tenneckes et Lumley 1973) :

$$\frac{U_0 - \bar{u}}{U_s} = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (5-11)$$

On établit également que les échelles caractéristiques du sillage axisymétrique évoluent longitudinalement selon les relations suivantes :

$$\frac{U_s(x)}{U_0} = 2.8 \left(\frac{x}{\theta} \right)^{-\frac{2}{3}} \quad (5-12)$$

$$\frac{l(x)}{\theta} = 0.6 \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (5-13)$$

et le frottement turbulent obéit au profil affine suivant :

$$-\frac{\overline{u'v'}}{U_s^2} = -\frac{1}{14.1} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (5-14)$$

avec l'approximation de l'énergie turbulente :

$$k = -3.75 U_s^2 \frac{f'(\xi)}{14.1} \quad (5-15)$$

La conservation du flux transversal de déficit de quantité de mouvement impose dans ce cas la condition suivant :

$$U_s l^2 \approx \text{constante} \quad (5-16)$$

5.2.2 Mouvement relatif des bulles en écoulement à bulles

5.2.2.1 Vitesse relative des bulles en écoulement à bulles

On se propose de calculer la vitesse moyenne de glissement en supposant maintenant que le milieu est relativement dense mais en considérant également que l'écoulement reste suffisamment dilué pour supposer que le champ de vitesse vu par la bulle reste le même que dans le cas de la bulle isolée. Dans ces conditions, la vitesse U_0 , définie à partir du bilan intégral de quantité de mouvement reste inchangée puisque ce bilan est contrôlé par la poussée d'Archimède, la même dans les deux cas. Dans ces conditions la vitesse moyenne de glissement peut être obtenue à partir de la conservation du débit liquide à travers la section du volume de contrôle. Pour des bulles ellipsoïdales, la conservation du débit liquide impose :

$$U_0 (L^2 - \frac{\pi}{4} d_p^2) = U_R L^2 \quad (5-17)$$

où d_p est le diamètre suivant le grand axe de l'ellipsoïde (diamètre de surface projetée perpendiculairement au mouvement relatif des bulles). En notant d le diamètre équivalent des bulles on a $d = \gamma^{\frac{1}{3}} d_p$ où γ est le coefficient d'aplatissement défini par le rapport de la longueur du petit axe sur celle du grand axe, l'équation (5-17) s'écrit :

$$\text{soit } U_R = U_0 (1 - \frac{\pi}{4\gamma^{\frac{2}{3}}} \frac{d^2}{L^2}) \quad (5-18)$$

En remarquant que $L = \eta d \alpha^{\frac{1}{3}}$ avec $\eta = \left[\frac{\pi}{6} \right]^{\frac{1}{3}}$, l'équation (5-18) s'écrit :

$$\frac{(U_0 - U_R)}{U_0} = \frac{\pi}{4\gamma^{\frac{2}{3}}\eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}} \quad \text{Soit } U_R = U_0 (1 - \frac{\pi}{4\gamma^{\frac{2}{3}}\eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}}) \quad (5-19)$$

La puissance en $\frac{2}{3}$ de α signifie que l'intensité du reflux est inversement proportionnelle au taux de présence surfacique du liquide. Tout se passe comme si la bulle ajuste sa vitesse relative pour compenser l'augmentation du cisaillement due à l'entraînement du liquide du fait du confinement latéral du sillage. Rappelons que le débit entraîné dans le sillage est indépendant de x . Garnier et al (2002) proposent une corrélation en puissance 1/3 de α supposant que la modification de la vitesse relative est due à des interactions hydrodynamiques en relation avec la distance inter-bulles.

5.2.2.2 Coefficient de traînée en écoulement à bulles

La diminution du glissement moyen est intuitivement interprétée comme une augmentation du coefficient de traînée à cause des interactions hydrodynamiques à taux de vide relativement importants, Larue de Tournemine (2001). On adopte cette démarche pour commenter le résultat (5-18). La conservation de quantité de mouvement impose :

$$\frac{C_D A}{2} U_{R0}^2 (1 - \frac{4}{\pi\gamma^{\frac{2}{3}}\eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}})^2 = \frac{C_{D0} A}{2} U_0^2 \quad (5-20)$$

où C_{D0} est le coefficient de traînée sur une bulle isolée. Le coefficient de traînée s'exprime alors par :

$$C_D = \frac{C_{D0}}{\left(1 - \frac{4}{\pi \gamma^{\frac{2}{3}} \eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}}\right)^2} \quad (5-21)$$

5.2.2.3 Résultats et discussions

Les expériences de Garnier et al (2002) ont été menées dans une colonne cylindrique de diamètre 60 mm. Les bulles sont injectées uniformément dans la section. Les auteurs ont procédé de telle sorte qu'ils conservent l'homogénéité de l'écoulement dans le noyau central de la colonne. La gamme des valeurs de taux de vide étudiée s'étale de 0.01 à 0.4 avec des bulles de diamètres équivalents compris entre 1.5 mm et 3 mm. D'autre part les auteurs ont observé que les bulles ont une forme ellipsoïdale avec un coefficient d'aplatissement estimé de l'ordre de 0.5.

Les équations (5-19) et (5-21) donnent dans ce cas respectivement :

$$U_R = U_0 (1 - 1.92 \alpha^{\frac{2}{3}}) \quad (5-22)$$

et

$$C_D = \frac{C_{D0}}{(1 - 1.92 \alpha^{\frac{2}{3}})^2} \quad (5-23)$$

La relation (5-22) indique que la vitesse U_R admet la vitesse U_0 comme valeur asymptotique lorsque le taux de vide tend vers zéro. Nous comparons dans les figures (5-3) et (5-4) le rapport des vitesses $\frac{U_R}{U_0}$ calculé à partir de la relation (5-22) aux données expérimentales de Garnier et al (2002) pour des différentes valeurs du taux de vide.

Les figures (5-2) et (5-3) présentent la variation du rapport $\frac{U_R}{U_0}$ en fonction de α et $\alpha^{\frac{2}{3}}$ (Chahed et al 2004). Ces figures montrent que l'expression de la vitesse relative reproduit bien le glissement moyen mesuré par Garnier et al (2002). La figure (5-3) a l'air d'indiquer que même si les

interactions hydrodynamiques, à forts taux de vides sont importantes la loi du glissement en $2/3$ du taux de vide est maintenue jusqu'à des taux de vide atteignant 15%. Au delà de cette valeur le confinement devient tel que les interactions hydrodynamiques deviennent importantes et le schéma de calcul se trouve insuffisant, Lance (1986). La loi de variation en puissance $1/3$ de α proposée par Garnier et al (2002) semble mieux approximer les résultats expérimentaux pour les forts taux de vide. On peut interpréter ce résultat par l'effet important des interactions hydrodynamiques dans ce cas qui sont en relation avec la distance inter-bulles.

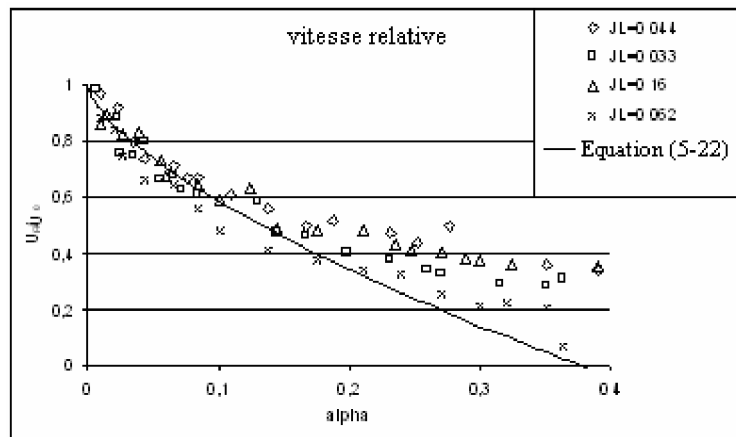


Figure (5-2): Variation de la vitesse relative en écoulement à bulles avec le taux de vide. Comparaison aux résultats expérimentaux de Garnier et al (2002)

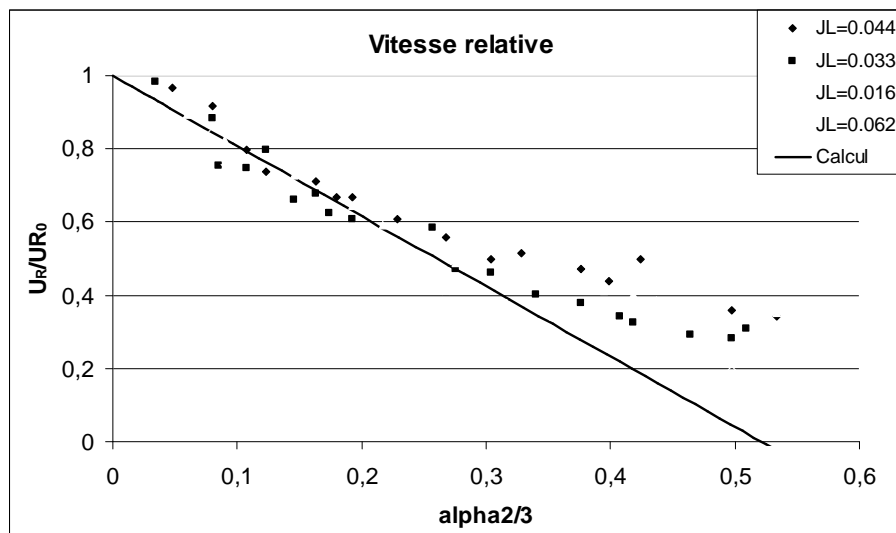


Figure (5-3): Variation de la vitesse relative en écoulement à bulles en fonction de $\alpha^{\frac{2}{3}}$. Comparaison aux résultats expérimentaux de Garnier et al (2002).

5.3 Turbulence induites par les bulles en écoulement à fort taux de vide

5.3.1 Énergie cinétique turbulente dans le sillage lointain

L'équation (5-14) indique que le profil adimensionnel (sillage lointain) du frottement turbulent a une valeur maximale pour $\xi = 1$ où on a $\frac{\overline{u'v'}}{k} = 0.043$ et il s'annule sur l'axe et aux frontières du sillage. D'autre part, on sait par l'expérience que dans les couches cisillées on a :

$$-\overline{u'v'} = 0.4\overline{u'^2} = \frac{0.8}{3}k \quad (5-24)$$

on a alors en première estimation pour l'écoulement externe lorsque $\xi > 1$ la relation suivante :

$$k = -3.75 U_s^2 \overline{u'v'} \approx -\frac{1}{\sqrt{C_\mu}} \overline{u'v'} \quad (5-25)$$

Le résultat (5-24) est bien connu pour les écoulements proches d'un équilibre production-dissipation. On doit donc avoir en première estimation :

$$k = -3.75 U_s^2 \frac{f'(\xi)}{R_{ET}} \quad (5-26)$$

$$\text{avec } f(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \text{ et } R_{ET} = 12.5 \quad (5-27)$$

On remarque que cette solution n'est pas valable dans la zone centrale du sillage ($\xi < 1$). Les expériences montrent que l'énergie turbulente n'est pas nulle sur l'axe du sillage alors que $\overline{u'v'} = 0$ et $f'(\xi) = 0$ à $\xi = 0$. On pourra établir une estimation acceptable de k dans la zone $\xi < 1$ en examinant l'équation du bilan de l'énergie cinétique turbulente et en déterminant des estimations de ces différents termes.

Dans la zone d'affinité du sillage plan, $1 < \xi < \sqrt{3}$, Tennekes et Lumly (1973) montrent que la diffusion compense à peu près l'advection, la production va compenser alors la dissipation. Le sillage est alors le siège, au moins dans la zone d'affinité, d'une turbulence à peu près équilibrée dont le budget est dominé par l'égalité production-dissipation. Dans la zone extérieure du sillage, la diffusion turbulente évacue l'énergie vers l'extérieur. La production tend vers 0 ainsi que la dissipation : le budget est dominé par l'égalité advection-diffusion. Lorsque l'on se rapproche de l'axe, la production ne compense plus la dissipation qui augmente du fait du mélange important. L'advection augmente également dans la mesure où elle apporte l'énergie turbulente.

On retrouve des résultats similaires pour le sillage axisymétrique (figure (5-4)) où le modèle de l'équilibre production-dissipation donné par l'expression (5-26) produit un profil (trait continu) qui sous-estime l'énergie turbulente à l'axe du sillage où l'apport par convection montre que le niveau est en réalité plus important en comparaison avec les mesures (trait discontinu) de Uberoi et Freymuth (1970). A l'extérieur du sillage l'expression (5-26) donne des niveaux d'énergie plus importants et le modèle de l'équilibre production-dissipation est insuffisant dans cette zone où le bilan de l'énergie cinétique est plutôt dominé par l'équilibre advection diffusion.

Il n'en reste pas moins que le modèle de l'équilibre production-dissipation semble bien représenter le bilan global de l'énergie cinétique turbulente à travers toute la section du sillage.

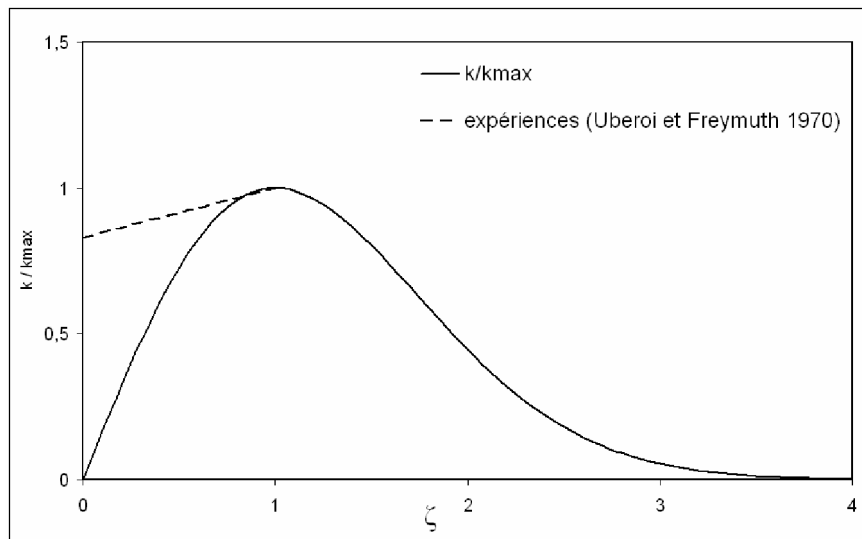


Figure (5-4): Energie cinétique turbulente dans le sillage axisymétrique

Autrement dit, si on s'intéresse au montant global de l'énergie turbulente dans le sillage on peut se contenter d'intégrer l'expression (5-17) pour représenter le montant global.

Considérons que l'origine fictive du sillage est à $x = 0$. On considère que la largeur de référence à $x = x_0$ est $\lambda(x_0) = \frac{d}{2}$ et qu'à partir de là l'hypothèse d'affinité est vérifiée,

Pour les écoulements dilués ($L \gg d$) on considère que l'abscisse finale x_F est tel que

$(x_F - x_0) \approx L$. On pose $\frac{x_0}{d} = m = \frac{1}{8\beta^3\chi^2}$, en notant $X = \frac{x}{md}$ on a :

$$X_0 = \frac{x_0}{md} = 1 \quad \text{et} \quad X_F = \frac{x_F}{md} = \frac{\eta\alpha^{\frac{1}{3}}}{m} + 1 \quad (5-27)$$

On obtient :

$$\lambda(x) = \frac{d}{2} X^{\frac{1}{3}} \quad \text{et} \quad U_s(x) = 4\chi^2 U_0 X^{-\frac{2}{3}} \quad (5-28)$$

L'équation s'écrit donc :

$$k_s = \sqrt{2\pi}\chi^2 md^3 \frac{3.75}{R_{ET}} 4\chi^2 U_0^2 \int_1^{X_F} X^{-\frac{2}{3}} dX = 3\sqrt{2\pi}\chi^2 md^3 \frac{3.75}{R_{ET}} 4\chi^2 U_0^2 (X_F^{\frac{1}{3}} - 1) \quad (5-29)$$

En remarquant que le volume du liquide dans le volume de contrôle est $V_L = \eta^3 d^3 \alpha^{-1} (1 - \alpha)$, l'énergie cinétique k_s par unité de volume du liquide est alors :

$$k_s = 3\sqrt{2\pi} 4\chi^4 md^3 \frac{3.75}{R_{ET}} U_0^2 \frac{(\frac{\eta\alpha^{\frac{1}{3}}}{m} + 1)^{\frac{1}{3}} - 1}{\eta^3 d^3 \alpha^{-1} (1 - \alpha)} = 3\sqrt{2\pi} 4\chi^4 m \frac{3.75}{R_{ET}} \frac{(\frac{\eta\alpha^{\frac{1}{3}}}{m} + 1)^{\frac{1}{3}} - 1}{\eta^3} \frac{\alpha}{(1 - \alpha)} U_0^2 \quad (5-30)$$

avec

$$U_R = U_0 \left(1 - \frac{\pi}{4\gamma^{\frac{2}{3}}\eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}}\right)$$

5.3.2 Résultats et discussions

L'énergie cinétique induite par les bulles est écrite comme la somme de l'énergie produite dans le sillage et de la pseudo-turbulence gouvernée par les effets de masse ajoutée :

$$k_{BI} = k_S + k_{SP} \quad (5-31)$$

où k_{SP} est l'énergie cinétique produite par la masse ajoutée dans le mouvement relatif moyen et qui en écoulement homogène est donnée par la solution de l'écoulement potentiel de Bieshevel et Wijngaarden (1984) :

$$k_{SP} = \frac{1}{4} \alpha U_R^2 \quad (5-32)$$

On compare dans la suite les expressions de l'énergie cinétique induite par les bulles avec les résultats expérimentaux de Garnier (2001). A cet effet on pose :

$$\overline{u_s'^2} = \frac{2}{3} k_{SP} \quad \text{et} \quad \overline{u_{SP}'^2} = \frac{4}{10} k_{SP} \quad \text{conformément à la solution potentielle.}$$

La figure (5-5) montre une comparaison des résultats expérimentaux avec la solution exprimant l'énergie cinétique totale induite par les bulles en fonction de U_0^2 . La figure (5-6) présente la même comparaison mais l'énergie cinétique induite par les bulles est exprimée en fonction de U_R^2

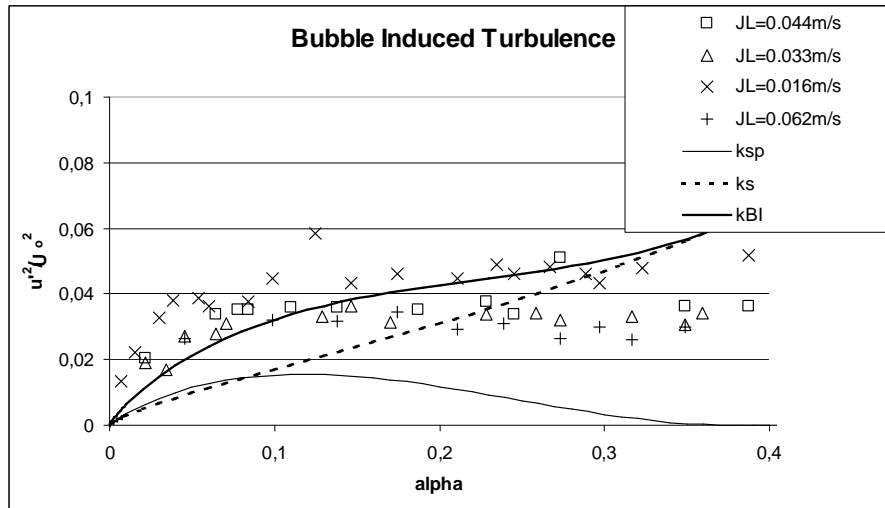


Figure (5-5) : Energie totale induite par les bulles et énergie déduite de la solution potentielle normées par U_0 . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Garnier et al (2002).

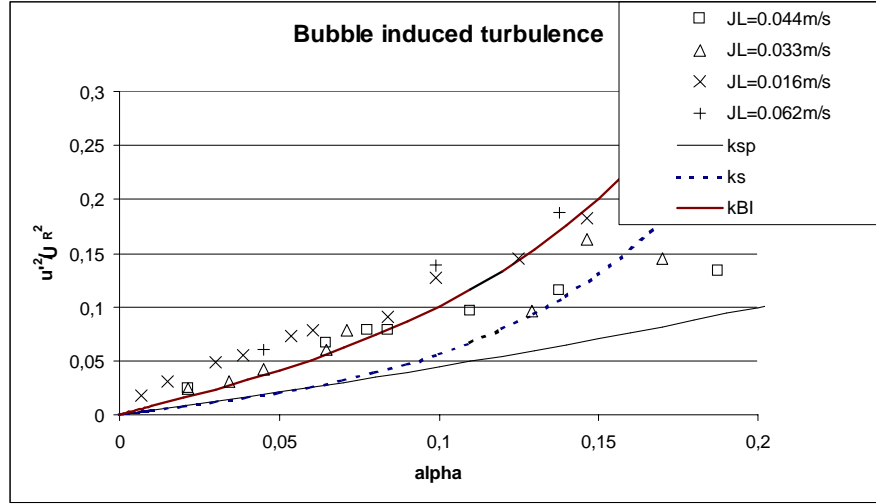


Figure (5-6) : Energie totale induite par les bulles et énergie déduite de la solution potentielle normées par U_R . Comparaison avec les résultats expérimentaux de Garnier et al (2002).

La figure (5-5) indique que l'énergie cinétique normée par U_0 est relativement bien reproduite. C'est un résultat qui est en accord avec les expériences d'Amaury (2001) qui indiquent que c'est en effet la vitesse du champ lointain qui semble bien normer l'énergie cinétique turbulente induite par les bulles.

5.4 Un nouveau modèle pour la turbulence induite par les bulles :

5.4.1 Equation de transport de la turbulence induite par les bulles :

En écoulement homogène, l'énergie cinétique induite par les bulles est :

$$k_{BI} = k_{BIH} = k_{SP} + k_S \quad (5-33)$$

où k_{SP} est l'énergie cinétique produite par la masse ajoutée dans le mouvement relatif moyen et qui en écoulement homogène est donnée par la solution de l'écoulement potentiel de Bieshevel et Wijngaarden (1986) :

$$k_{sp} = \frac{1}{4} \alpha U_R^2 \quad (5-34)$$

et k_s est l'énergie cinétique produite dans le sillage qui en écoulement homogène s'écrit :

$$k_s = \sqrt{2\pi} \, 4\chi^4 m \frac{3.75}{R_{ET}} \frac{(\frac{\eta\alpha^{\frac{1}{3}}}{m} + 1)^{\frac{1}{3}} - 1}{\eta^3} \frac{\alpha}{(1-\alpha)} U_0^2 \quad \text{avec} \quad U_R = U_0 (1 - \frac{\pi}{4\gamma^3 \eta^2} \alpha^{\frac{2}{3}}) \quad (5-35)$$

En milieu inhomogène, on ne dispose pas de résultats sur la génération du champ fluctuant par le mouvement relatif des bulles et nous retenons l'équation suivante de transport de la turbulente induite par les bulles:

$$\frac{D}{Dt} k_{BI} = \text{Diff}(k_{BI}) + \frac{D}{Dt} k_{BIH} \quad (5-36)$$

L'équation (5-36) ainsi modélisée, exprime que l'écart de la turbulente induite par les bulles par rapport à la solution en écoulement homogène représente une diffusion due précisément au caractère inhomogène de l'écoulement.

5.4.2 Résultats et discussions

Ce modèle a été appliqué pour la simulation de l'écoulement à bulles turbulent homogène uniforme derrière une grille réalisé expérimentalement par Lance et Bataille (1991) (Chahed et al 2004). Les résultats numériques reproduisent une valeur correcte de la vitesse relative des bulles ainsi que des niveaux satisfaisant de l'énergie turbulente pour les différents taux de vide.

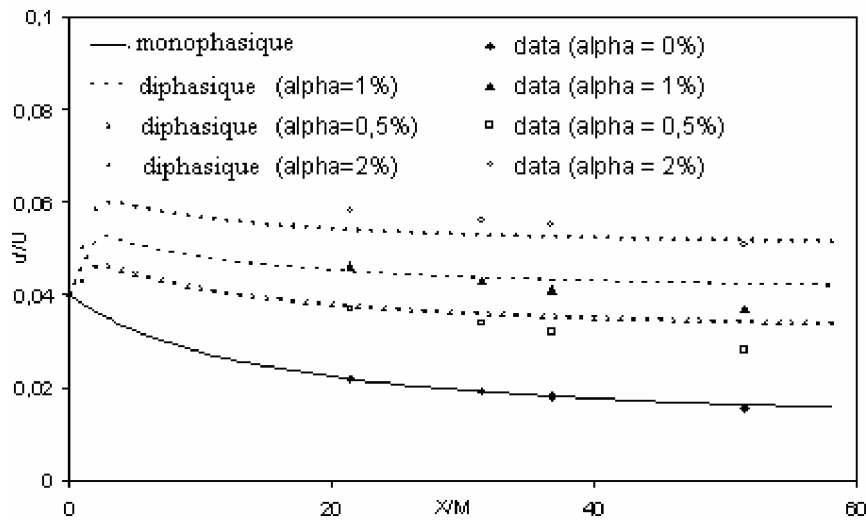


Figure (5-9) : Résultats numériques en écoulements à bulles homogène uniforme. Comparaison avec les résultats de Lance et Bataille (1991).

5.5 Conclusions

Les résultats expérimentaux obtenus en écoulements à bulles à forts taux de vide montrent un résultat essentiel qui consiste à la décroissance de la vitesse relative des bulles lorsque le taux de vide augmente. Par conséquent, le modèle de l'énergie pseudo-turbulente basé sur la solution potentielle qui attribue la production de la pseudo-turbulence à l'effet de la force de masse ajoutée s'avère incomplet.

Nous avons proposé dans ce chapitre un modèle de turbulence basé sur une modélisation de la vitesse relative des bulles en fonction du taux de vide et une décomposition de l'énergie turbulente en milieu dense en une contribution k_{SI} produite par cisaillement dans le liquide et une contribution k_{BI} induite par les bulles comprenant l'énergie produite au niveau des sillages des bulles ainsi que l'énergie générée par la force de masse ajoutée.

La mise en œuvre du modèle "de la turbulence induite par les bulles" pour la simulation des expériences de Garnier et al (2002) montre une reproduction satisfaisante des niveaux de l'énergie

turbulente. Les résultats numériques obtenus montrent également que la contribution essentielle à cette énergie correspond à l'énergie produite dans les sillages des bulles.

L'application du modèle de turbulence proposé dans le cas de l'écoulement à bulles turbulent reproduit correctement l'augmentation de l'énergie turbulente observée dans les cas diphasiques tout en calculant correctement la vitesse relative des bulles.

Conclusion

Le travail développé dans cette thèse porte sur le développement de modèles eulériens à deux fluides au premier ordre déduits par réduction des fermetures au second ordre, et ceci dans l'objectif d'élaborer des modèles à deux fluides adaptés aux applications industrielles qui préservent le mieux le contenu physique des fermetures au second ordre.

Après avoir présenté dans le chapitre 1 la démarche de la modélisation eulérienne diphasique et précisé en particulier les difficultés caractéristiques qu'elle met en jeu, nous avons développé dans le chapitre 2 une sorte de classification des modèles de la turbulence en écoulements à bulles proposés dans la littérature. Cette classification ne vise pas à être exhaustive mais plutôt à dégager les traits caractéristiques de l'évolution de la modélisation de la turbulence à bulles. Dans le chapitre 3 nous sommes revenus sur l'analyse et l'interprétation des mécanismes de la turbulence à bulles dans le cas de deux écoulements fondamentaux (turbulence homogène uniforme et à cisaillement constant) en vue de déduire des modèles de turbulence à bulles par réduction au premier ordre des fermetures au second ordre. Cette démarche nous a permis de déduire deux modèles ($k_0 - k_s - \varepsilon$ et $k_0 - k_s - \omega$) dont la mise en œuvre en écoulement homogène a prouvé qu'ils réalisent un niveau de description de la structure de la turbulence aussi satisfaisant que celui obtenu par la modélisation au second ordre. Le modèle $k_0 - k_s - \varepsilon$ a été généralisé dans le chapitre 4 au cas des écoulements inhomogènes. Son implantation dans le code numérique industriel "MELODIF" nous a permis de l'appliquer dans le cas de l'écoulement à bulles cisailé libre de sillage. L'analyse des résultats numériques du point de vue du comportement affine nous a permis d'interpréter la modification des échelles caractéristiques de l'écoulement à bulles par comparaison au cas monophasique correspondant. Nous avons considéré dans le chapitre 5 le cas des milieux denses caractérisés par des forts taux de vide, le modèle développé dans ce cas tient compte de la modification de la vitesse relative lorsque le taux de vide augmente ainsi que de l'énergie turbulente produite dans les sillages des bulles.

Les développements de modélisations plus générales porteront sur la prise en compte de l'effet des interactions hydrodynamiques dans les lois de fermeture du transfert interfacial de quantité de

mouvement, sur l'approfondissement de la modélisation de la turbulence et sur la modélisation de la distribution des phases

Les phénomènes de transfert sont en relation directe avec la mise en contact des phases, donc avec le taux volumique de présence de phases mais aussi avec le taux surfacique de présence de l'aire interfaciale. Se précise alors toute l'importance de la maîtrise de la distribution des bulles et de leurs tailles dans le phénomène de transfert dans les systèmes diphasiques gaz-liquide. Il s'agit, du point de vue de la modélisation, de progresser dans l'amélioration du contenu physique des modèles pour mieux représenter les différentes interactions en milieu diphasique : interaction interfaciales, interactions hydrodynamiques en milieu dense, interaction et échange interfacial en écoulement de paroi, transport de l'aire interfaciale, coefficient de transfert de masse en écoulement turbulent diphasique.

Les expériences récentes en écoulements gaz-liquide à forts taux de vide montrent d'importantes modifications de la structure des l'écoulement diphasique. Dans ces écoulements, l'agitation induite par les bulles devient prépondérante et la structure de l'écoulement diphasique est essentiellement gouvernée par le mouvement relatif des bulles. Il devient donc difficile de bien représenter l'écoulement diphasique et ses propriétés de transport turbulent sans une description précise des mécanismes qui contrôlent la turbulence "classique" du liquide, la "pseudo-turbulence" induite par les bulles et leurs éventuels couplages.

Turbulence et pseudo-turbulence sont deux phénomènes gouvernés par des mécanismes fondamentalement différents. Dans les écoulements à forts taux de présence du gaz (milieu dense), les interactions hydrodynamiques sont fortes et elles ont des effets importants sur la structure des champs moyens, fluctuant et de distribution des phases dans les écoulements diphasiques. De nouvelles fermetures visant l'amélioration de la des modèles de pseudo-turbulence ont été développés et testés vis-à-vis de données expérimentales alrécentes

Des travaux en cours sur les transferts en milieu gaz-liquide turbulent, non rapportés dans ce mémoire de thèse mais auxquels nous contribuons (Lemaissi et al 2003), montrent que les échelles caractéristiques des transferts dépendent des échelles de la turbulence en général mais dépendent également des échelles propres qui caractérisent la bulle et son mouvement. Les échelles qui semblent déterminer les transferts aux interfaces sont celles qui sont inférieures à la taille de la bulle (les échelles vues par la bulle); les échelles plus grandes ne sont pas sans effets sur le transfert

puisqu'elles déterminent les mouvements des grandes structures donc l'hydrodynamique des systèmes gaz-liquide. Le problème est d'autant plus complexe que les champs moyens et fluctuants des deux phases sont perturbés par les échanges interfaciaux: c'est donc dans une perspective globale de modélisation des écoulements diphasiques qu'il faudrait placer le problème de l'étude des transferts dans les systèmes gaz-liquide.

D'autre part et compte tenu de l'importance de la distribution des tailles des bulles dans les phénomènes de transfert en milieu gaz-liquide, il nous paraît indispensable de prendre en compte la distribution des diamètres pour mieux préciser la formulation des forces interfaciales et aboutir à une meilleure représentation de la distribution des bulles. Pour y parvenir il va falloir construire des modèles à $N+1$ fluides (N dispersions de tailles différentes et la phase continue). Une telle démarche mécaniste, bien que théoriquement envisageable, va poser d'énormes difficultés de modélisation notamment en ce qui concerne la modélisation des interactions entre la phase continue et les différentes classes de la dispersion (interactions avec le champ moyen et fluctuant) et la description des échanges entre les N dispersions (interactions hydrodynamiques, coalescence, rupture).

Cependant, l'intégration d'une démarche phénoménologique semble, au stade actuel du développement des modèles à deux fluides, tout à fait indiquée pour élargir le champ d'application des modèles diphasiques monodispersés à une dispersion présentant une certaine distribution de tailles de bulles. Des tentatives de modélisation du transport de l'aire interfaciale ont récemment été intégrées dans des modèles à deux fluides mais ces modèles restent encore assez rudimentaires et il est nécessaire de mettre au point de nouvelles expériences pour soutenir cet effort de modélisation.

Références bibliographiques

AEA Technology, (1997), "CFX 4.2 : Solver", Didcot, Oxfordshire, UK

Ahmed A. M. et Elgobashi S., (2000), "On the mechanisms of modifying the structure of turbulent homogeneous shear flows with dispersed particles", *Physics Fluids*, vol. 12, pp. 2906-2930

Antal S.P, Lahey JR, Flaherty J.E, (1991), "Analysis of phase distribution in fully developed laminar bubbly two-phase flow", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 5, pp. 635-652

Arnold G. S., Drew D. A., Lahey R. T., (1988), "Derivation of constitutive equation for interfacial force and Reynolds stress for a suspension of sphere using ensemble averaging", *Journal of Chemical Engineering Communications*, vol. 86, pp. 43-54

Auton T. R, Hunt J. C. R, Prud'Homme M., (1988), "The force exerted on a body in inviscid unsteady non-uniform rotational flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 197, pp. 241-257.

Basset A. B., (1888), "A treatise on hydrodynamics", Cambridge.

Batchelor G. K. et Townsend A. A., (1948), "Decay of turbulence in the final period", *Proc. Roy. Soc., A (London)*, vol. 194(1039), pp. 527-543

Batchelor G. K., (1972), "Sedimentation in a dilute dispersion of spheres", *J. Fluid Mech.*, vol. 52, pp. 245-268

Bel Fdhila R., (1991), "Analyse expérimentale et modélisation d'un écoulement vertical à bulles dans un élargissement brusque", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse

Bel Fdhila R., Simonin O. (1992). "Eulerian prediction of a turbulent bubbly flow downstream of a sudden pipe expansion". Workshop on Two-phase flow predictions, 30 march-2 April, Erlangen

Bel Fdhila R. et Duineveld P.C., (1996), "The effect of surfactant on the rise of a spherical bubble at high Reynolds and Peclet numbers", *Phys. Fluids*, vol. 8, pp. 310-321

- Bellakhal G., Chahed J., Masbernat L., (2004) a, "Analysis of the turbulence structure in homogeneous shear bubbly Flow using a turbulent viscosity model", *Journal of Turbulence*, vol. 5, 2004, 036
- Bellakhal G., Chahed J., Masbernat L., (2004) b, "k-Omega turbulence model for bubbly flows", 5th International Conference on Multiphase Flow, ICMF'05 Yokohama, Japan
- Bestion D. (1994), "General description of CATHARE, Note CEA STR/LML/EM/94-265", rapport technique, Commissariat à l'Energie atomique
- Biesheuvel A., Van Wijngaarden L., (1984), "Two-phase flow equation for a dilute dispersion of gas bubbles in liquid", *J. Fluid Mech.*, vol. 148, pp. 301-318
- Boivin M., Simonin O., Squires K. D., (2000), "on the prediction of gas-solid flows with two-way coupling using Large Eddy Simulation", *Physic Fluids*, vol. 12, pp. 2080-2090
- Boussinesq J., (1885), "Sur la résistance qu'oppose un fluide indéfini au repos, sans pesanteur, au mouvement varié d'une sphère solide qu'il mouille sur toute la surface, quand les vitesses restent bien continues et assez faibles pour que leur carrés et produits soient négligeables, C.R.A.S. Paris, 100, pp. 935-937
- Burton T. et Eaton J. K., (2002), "Analysis of a fractional-step method on overset grid", *J. Comp. Physics*, vol. 177, pp. 1-29
- Chahed J., (1999), "Forces interfaciale et turbulence dans les écoulements à bulles", Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tunis
- Chahed J., Colin C., Masbernat L., (2002), "Turbulence and phase distribution in bubbly pipe flow under micro-gravity condition", *J. Fluid Eng.*, vol. 124(4), pp. 951-956.
- Chahed J., Roig V., Masbernat L., (2003), "Eulerian-Eulerian two-fluid model for turbulent gaz-liquid bubbly flows", *Int J. of Multiphase Flow*, vol. 29-1, pp. 23-49
- Chahed J., Bellakhal G., Masbernat L. (2004), "Turbulence and pseudo-turbulence modelling in low and high void fraction bubbly flows", 5th International Conference on Multiphase Flow, ICMF'05 Yokohama, Japan
- Clift R., Grace J. R., Weber M. E., (1978), "Bubbles, Drops and Particles", Academic Press, New York.

- Champagne F. H., Harris V. G., Corsin S., (1970), "Experiments on nearly homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech., vol. 41(1), pp. 81-139
- Chassing P., (2000), "Turbulence en mécanique des fluides", Cépaduès-Editions, France
- Comte-Bello G., Corsin S., (1966), "The use of a contraction to improve the isotropy of grid-generated turbulence", J. Fluid Mech., vol. 25(4), pp. 657-682
- Csanady G.T., (1963), "Turbulent diffusion of heavy particles in the atmosphere" J. Atm. Sc vol 20 pp. 201-208
- Drew D. A., Wallis G. B., (1964), "Fundamentals of two-phase modelling", Third International Workshop on Two-phase Flow Fundamentals, Imperial College, London, June 15-19.
- Drew D.A., Lahey R.T., (1982), "Phase distribution mechanisms in turbulent low-quality two-phase flow in circular pipe", J. Fluid Mech., vol. 117, pp. 91-106.
- Drew D. A., (1983), "Mathematical modelling of two-phase flow", Ann. Rev. Fluid Mech., vol. 15, pp. 261-291.
- Drew D.A., Wood R.T., (1985), "Overview and taxonomy of models and methods for workshop on two-phase flow fundamentals", National bureau of standards, Gaithersburg, Maryland, September 22-27
- Elgobashi S. et Truesdell G. C., (1993), "On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. I. Turbulence modification", Phys. Fluids, vol. 5, pp. 1790-1801
- Fadlun E. A., Verzicco R., Orlandi P., Cabot W. H., (2000), "Combined immersed boundary finite-difference methods for three-dimensional complex flow simulations", J. Comp. Physics, vol. 161, pp. 35-60
- Février P. et Simonin O., (2001), "On the spatial distribution of heavy particle velocities in turbulent flow : from continuous field to particulate chaos", Turbulence and shear flow phenomena, second Intl. Symp, KTH, Stockholm
- Gabillet C., Colin C., Fabre J., Larrauri D., Brière E., (1998), "Experimental study in a turbulent boundary layer", Third Int. Conf. On Multiphase flow, Lyon, June 8-12

- Garnier C., Lance M., Marié J.L., Mareuge I., (2002), "Experiments on buoyancy-driven bubbly flows at low and high void fractions". Proceedings 10th Workshop on Two-Phase Flow Predictions, Merseburg, edited by M. Sommerfeld
- Gatignol R., (1983), "The faxen formulae for a rigid particle in an unsteady non-uniform stokes flow", Journal de mécanique théorique et appliquée. 9, 143-160.
- Grossetête C., (1995) a, "Caractérisation expérimentale et simulations de l'évolution d'un écoulement diphasique à bulles ascendant dans une conduite verticale", Thèse de Doctorat à l'Ecole Centrale de Paris.
- Grossetête C., (1995) b, "Experimental investigation and preliminary numerical simulations of void profile development in a vertical cylindrical pipe", 2nd Int. Conference on Multiphase Flow, Kyoto, Japan.
- Hadamard J. S., (1911), Comptes Rendus à l'Académie des Sciences de Paris, C.R.A.S., Paris, vol. 152, pp 1735-1738.
- Harris V. G., Graham J. A., Corsin S., (1977), "Further experiments in nearly homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech., vol. 81(4), pp. 657-687
- Hinze J. O., (1975), "Turbulence", 2nd edition. Mc Graw-Hill.
- Hirt C. W. et Nichol B. D., (1981), "Volume of fluid method for the dynamics of free surfaces boundaries", J. Comp. Phys., vol. 39, pp. 201
- Hu H. H., Patankar N. A., Zhu M. Y., (2001), "Direct numerical simulations of fluid-solid systems using Arbitrary-Lagrangian-Eulerian technique", J. Comp. Physics, vol. 169, pp. 427-462
- Ishii M., (1975), "Thermo-fluid dynamic theory of two-phase flow", Eyrolles, Collection de la Direction des Etudes et Recherche d'Electricité de France.
- Issa R. I. et Oliveira P. J., (1996), "Validation of two-fluid model in shear-free mixing layers. Fluids Engineering Division Conference, 236
- Kamp A. Colin C. Fabre J., (1995), "The local structure of a turbulent bubbly pipe flow under different gravity conditions" 2nd International Conference on Multiphase Flow, Kyoto, Japan.
- Kistler A. L., O'brien V., Corsin S., (1954), "Preliminary measurements of turbulence and temperature fluctuations behind a heated grid", Reas. Mem. N.A.C.A., 54D19

- Kolmogorov A. N., (1941), "On the generation of isotropic turbulence in an incompressible viscous fluid", Dokl Akad. Nauk SSSR, Physics, vol. 31, pp. 538-540
- Lahey R.T, Lopez de Bertodano M., (1991), "The prediction of phase distribution using two-fluid models", ASME/JSME Thermal Engineering proceeding, vol. 2, pp. 193-200"
- Lamb, (1932), "Hydrodynamics", Dover Press, New-York
- Lance M., (1986), "Etude de la turbulence dans les écoulements diphasiques dispersés", Thèse de doctorat ès Sciences, Université Claude Bernard, Lyon, France.
- Lance M. et Bataille J., (1991), "Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air water flow", J. Fluid Mech., vol. 222, pp. 95-118.
- Lance M., Marié J.L., Bataille J., (1991), "Homogeneous turbulence in bubbly flows". Journal of Fluids Engineering, vol. 113, pp. 295-300.
- Lance M., Marié J. L., Moursali E., Bataille J., Suzanne C., Roig V., Bel Fdhila R., Masbernat L., (1996), "Experimental study of turbulent bubbly shear flows", Chem. Eng. Commun., vol. 141, pp. 51-70
- Landau L. D., Lifshitz E. V., (1959), "Course of theoretical physics", Fluid Mechanics, vol. 6, Pergamon Press, Oxford.
- Launder B.E., Reece G.J., Rodi W., (1975), "Progress in the development of a Reynolds stress turbulence closure", J. Fluid mech., vol. 68, part 3, pp 537-566.
- Larue de Tournemine A., (2001), "Etude expérimentale de l'effet du taux de vide en écoulements diphasiques à bulles". Thèse de Doctorat à l'Institut de Mécanique des Fluides de Toulouse
- Lee S.J, Lahey Jr R.T, Jones Jr O.C., (1989), "The prediction of two phase turbulence and phase distribution phenomena using $k - \epsilon$ model", Japanese Journal of Multiphase Flow, vol. 3, pp 335-368
- Legendre D., Borée J., Magnaudet J., (1998), "thermal and dynamic aspects of the evolution of a spherical bubble moving steadily in a superheated or subcooled liquid", Physics of fluids, vol. 10(6), pp. 1256
- Ling S. C., Huang T.T., (1970), "Deacay of weak turbulence", Phys. Fluids, vol. 13(12), pp. 2912-2924

- Liu T.J., Bankoff S.G., (1990), "Structure of air-water bubbly flow in a vertical pipe: I- Liquid mean velocity and turbulence measurements", *Int. J. Heat and Mass Transfer.*, vol. 36 (4), pp 1049-1060.
- Lopez de Bertodano M., Lee S.J., Lahey R.T., Drew D.A., (1990), "The prediction of two-phase turbulence and phase distribution using a Reynolds stress model", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 112, pp. 107-113.
- Lopez de Bertodano M., Lee S.J., Lahey R.T., Jones. O. C., (1994), "Development of a $k - \epsilon$ model for bubbly two-phase flow", *Journal of Fluids Engineering*, vol. 116, pp. 128-134
- Magnaudet J., Rivero M., Fabre J. (1995), "Accelerated flows past a rigid sphere or a spherical bubble. Part 1. Steady staining flow", *J. Fluid. Mech.*, vol.284, pp. 97-135
- Mareuge I., Lance M. (1996), "Bubble-induced dispersion of a passive scalar in bubbly flows", *Proceeding of the 2nd International Conference on Multiphase flow*, Kyoto, April 3-7
- Massignon D. (1957), "Mécanique statistique des fluides", Dunod
- Maxey R., Riley J., (1983), "Equation of motion for a small rigid sphere in non-uniform flow", *Phys. of Fluids*, vol. 26 (4), pp. 883-889.
- Michiyoshi, I. et Serizawa A., (1986), "Turbulence in two-phase bubbly flow", *Nuclear Engineering and design*, vol. 95, pp. 253-267
- Miller R. S. et Bellan J., (1999), "Direct numerical simulation of a confined three-dimensional gas mixing layer with one evaporating hydrocarbon-droplet-laden stream", vol. 384, pp.293-338.
- Mills R. R., Kistler A. L., O'brien V., Corsin S., (1958), "Turbulence and temperature fluctuations behind a heated grid", *Tech. Note N.A.C.A.*, 4288
- Minier J. P., (1992), "Construction de la trajectoire d'une particule dans un écoulement turbulent", *Electricité de France, Direction des Etudes et de Recherches*.
- Morel C. (1997), "Modélisation multidimensionnelle des écoulements diphasiques gaz-liquide. Application à la simulation des écoulements à bulles ascendants en conduite verticale", Thèse de doctorat de l'Ecole Centrale de Paris.
- Moursali E., Marié J.L., Bataille J., (1995), "An upward turbulent bubbly layer along a vertical flat plate", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 21, pp. 107-117.

- Mulhearn P. J., Luxton R. E., (1975), "The development of turbulence structure in a uniform shear flow, homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech., vol. 68(3), pp. 577-590
- Odar F., Hamilton W. S., (1964), "Forces on a sphere accelerating in a viscous fluid", J. Fluid Mech., vol. 18 Part 2, pp. 229-240.
- Odar F., (1966), "Verification of the proposed equation for the calculation of the forces on a sphere accelerating in a viscous fluid", J. Fluid Mech., vol. 25, pp. 591-592.
- Reeks M. W., (1991), "On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows", Physics of Fluids, vol. 3, pp. 446-456
- Rivero M., (1991), "Etude par simulation numérique des forces exercées sur une inclusion sphérique par un mouvement accéléré", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse
- Rogallo R. S., (1981), "Numerical experiments in homogeneous turbulence", NASA-TM-81315
- Roig V., (1993), "Zones de mélange d'écoulements diphasiques à bulles", Thèse de Doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse.
- Roig V., Suzanne C., Masbernat L., (1998), "Experimental investigation of a turbulent bubbly mixing layer", Int. J. Multiphase Flow, vol. 24, pp. 35-54
- Rose W. G., (1966), "Results of an attempt to generate a homogeneous turbulent shear flow", J. Fluid Mech., vol. 25(1), pp. 97-120
- Rose W. G., (1970), "Interaction of grid turbulence with a uniform mean shear", J. Fluid Mech., vol. 44(4), pp. 767-779
- Sangani A. S., Didwania A. K., (1993), "Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large Reynolds numbers", J. Fluid Mech., vol. 250, pp. 307-337
- Sato Y., Sadatomi L., Sekoguchi K. (1981), "Momentum and heat transfer in two phase bubbly flow", Int. J. Multiphase Flow, vol. 7, pp. 167-190
- Sato Y., Sekoguchi K. (1975), "liquid velocity distribution in two-phase bubble flow", Int. J. Multiphase Flow, vol. 2, pp. 79-95

- Schoneborn P. R., (1975), "The interaction between a single partical and an oscillating flow, *Int. J. on Multiphase flow*, vol. 2, pp307-317.
- Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I., (1975), "Turbulence structure of air-water bubbly flow : I- Measuring techniques", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 2, pp. 221-233
- Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I., (1975), "Turbulence structure of air-water bubbly flow : II- Local properties", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 2, pp. 235-246
- Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I., (1975), "Turbulence structure of air-water bubbly flow : III- Transport properties", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 2, pp. 247-259
- Serizawa A. et Kataoka I., (1990), "Turbulence suppression in bubbly two-phase flow", *Nuc. Eng. Des.*, vol. 122, pp. 1-16
- Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I., (1986), "phase distribution in bubbly flow. Data set N°24", *Proceeding of the Second International Workshop on Two-phase Flow Fundamentals*.
- Serizawa A., Kataoka I., Michiyoshi I., (1992), "Phase distribution in bubbly flow", *Multiphase Science and technology*, vol. 6, Hewitt, G.F., Delhay J.M., Zuber N., Eds, Hemisphere Publ. Corp, pp. 257-301
- Simonin O., Viollet P.L., (1989), "Numerical study on phase dispersion mechanism in turbulent bubbly flows" *Int. Conf. on Mechanics of two-phase Flows*, June 12-15, Taipei, Taiwan.
- Simonin O., Viollet P.L., (1990), "Prediction of an oxygen droplets pulverization in a compressible subsonic coflowing hydrogen flow", *Symposium on Numerical Methods for Multiphase Flows*, June 4-7, Toronto, Canada
- Simonin O., (1990), "Eulerian formulation for particle dispersion in turbulent two-phase flows", *Proc 5th Workshop on Two-Phase Flow Predictions*, March 19-22, 1990, Erlangen, FRG
- Simonin O. (1991), "Prediction of the dispersed phase turbulence in particle-laden jets", *4th Symposium on Gas-Solid Flows*, ASME FED, Vol. 121, pp 197-206
- Squires K. D. et Eaton J. K., (1990), "Particle response and turbulence modification in isotropic turbulence by suspended particles", *Phys Fluids*, vol. 2, pp. 1191
- Stockes G. C., 1851, "On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 9, pp. 8-27.

- Stuhmiller (1977), "The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 3, pp. 551-560
- Sun T.Y., Faeth G.M., (1986), "Structure of turbulent bubbly jets-I. Methods and centerline properties", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 12, N°1, pp. 99-114
- Sun T.Y., Faeth G.M., (1986), "Structure of turbulent bubbly jets-II. Methods and centerline properties", *Int. J. Multiphase Flow*, vol. 12, N°1, pp. 115-126
- Sundaram S., et Collins L. R., (1999), "A numerical study of the modulation of isotropic turbulence by suspended particles", *J. Fluid Mech.*, vol. 379, Part 2, pp. 105-143.
- Sussman M., Smerka P., Other S., (1994), "A level set approach for computing solution to incompressible two-phase flow", *J. Comp. Phys.*, vol. 114, pp. 146-159
- Thai Van D., Minier J.P., Simonin O., Freydier P., Olive J., (1994), "multidimensional two-fluid model computation of turbulent dispersed two-phase flows", *Numerical Method of Multiphase Flows*, ASME, vol. 185
- Takagi S. et Matsumoto Y., (1994), "Three-Dimensional Deformation of a Rising Bubble", *Proc. German-Japanese Symp. On Multi-Phase Flow*, KfK5389, pp. 499-511
- Temkin S., Mehta H. K., (1982), "Drpolet drag in an accelerating and decelerating flow", *J. Fluid Mech.*, vol. 116, pp. 297-313.
- Tennekes H., Lumley J.L., (1973), "A first course in turbulence", MIT press.
- Tomiya A., Zun I., Sou A., Sakaguchi T., (1993), "Numerical analysis of bubble motion with the VOF method", *Nucl. Eng. Des.*, vol. 141, pp. 69-82
- Townsend A. A., (1956), "The structure of turbulent shear flow", University press, Cambridge
- Troshko A. A. et Hassen Y. A., (2001), "A two-equation turbulence model of turbulent bubbly flows", *Int. J. Mult. Flow*, vol. 27, pp. 1965-2000
- Unverdi S. O. et Trygvasson G., (1992), "A front tracking method for viscous incompressible multi-fluid flows", *J. Comp. Phys.*, vol. 100, pp. 25-37
- Van Wijngaarden L., (1976), "Hydrodynamic interaction between gaz bubbles un liquid", *J. Fluid Mech.*, vol. 77(1), pp. 27-44.

- Voinov O. V., (1973), "Force acting on a sphere in an homogenous flow of an ideal fluid", J. of Applied Mechanics and Technical Physics, vol. 14
- Wang S.K, Lahey Jr R.T, Jones Jr O.C., (1987), "Three dimensional turbulence structure and phase distribution measurements in bubbly two phase flows", Int. J. Multiphase Flow., vol. 13, pp. 327-343.
- Wang D. M., Issa R. I., Gosman A. D., (1994), "Numerical prediction of dispersed bubbly flow in a sudden enlargement", Num. Methods in Multiph. Flow, vol. 185
- Wallis G. B., (1969), "One dimensional two-phase flows", Mc Graw-Hill, New-York
- Wilcox, D. C., (1988), "Reassessment of the scale-determination equation for advanced turbulence models", AIAA J., vol. 26 (11), pp. 1299-1310.
- Zaichick L. I. et Derevich I. V., (1988), "Precipitation of particles from a turbulent flow", Isvestiya Akademii Nauk SSSR, vol. 5, pp. 96-104.
- Zuber N., Ishii M., (1979), "Drag coefficient and relative velocity in bubbly, droplet or particulate flows, AIChE Journal", vol. 25, pp. 843-855.